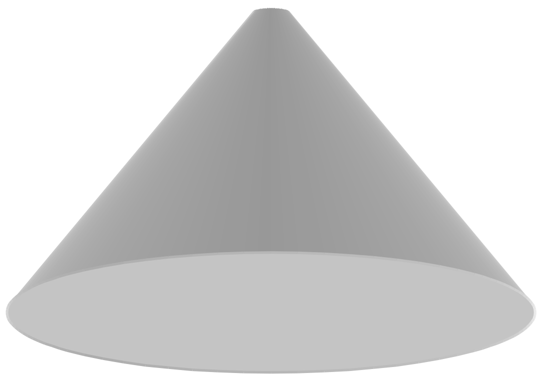
CÓNICAS



Resumen Teórico

Escrito por:

Prof. Arturo Rodrigo Farinha

Índice

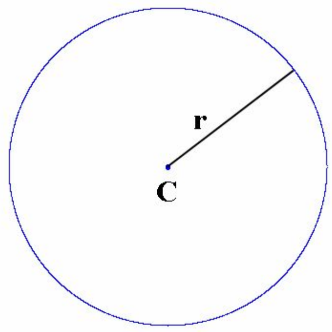
Introducción

Se llaman cónicas a las curvas: *Circunferencia*, *Parábola*, *Elipse* e *Hipérbola*.

Todas estas curvas tienen como *fórmula implícita* una ecuación de la siguiente forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

CIRCUNFERENCIA



DATOS

x_C	abscisa del centro
y_C	ordenada del centro
r	radio
$(r > 0)$	

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = -2\,x_C \\ E = -2\,y_C \\ F = {x_C}^2 + {y_C}^2 - r^2 \end{array}}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = \pm\sqrt{r^2 - \left(x - x_C\right)^2} + y_C}$$

$$x_C - r \le x \le x_C + r$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

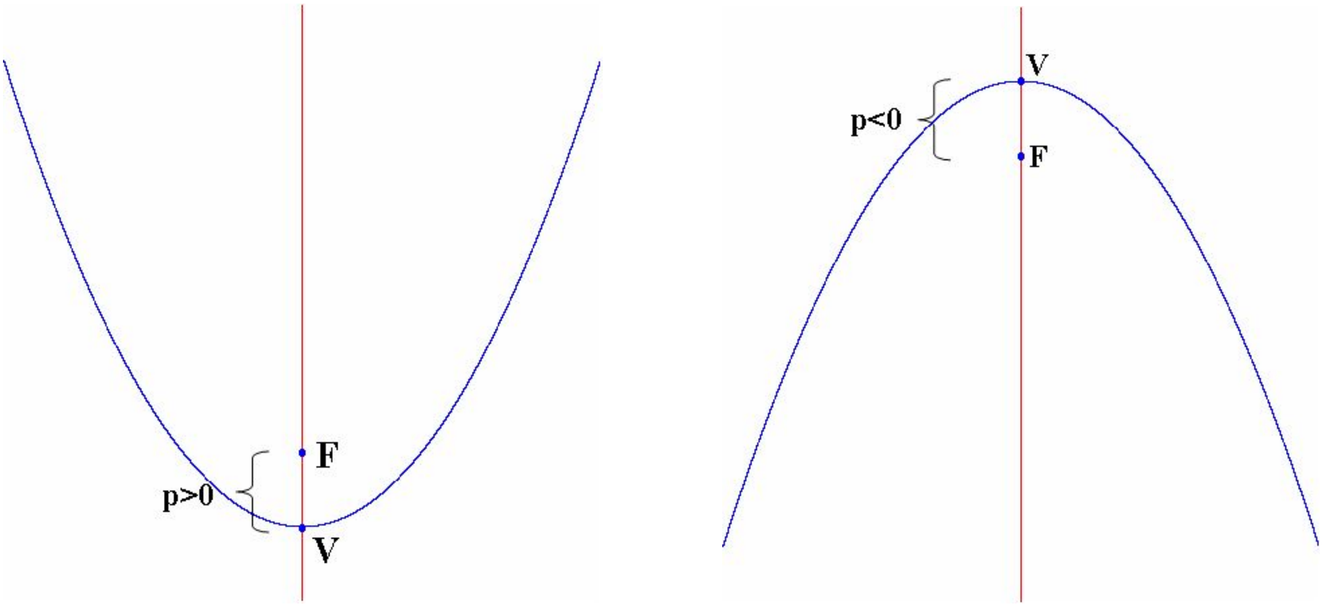
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(condición\ de\ existencia : D^2 + E^2 - 4F > 0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_C = -\dfrac{D}{2} \\ y_C = -\dfrac{E}{2} \\ r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} \end{array}}$$

PARÁBOLA

Eje de simetría VERTICAL



DATOS

	x_V	abscisa del vértice
	y_V	ordenada del vértice
DATOS	y_F	ordenada del foco
	$(y_F \neq y_V)$	

Parámetro auxiliar: $\boxed{p = y_F - y_V}$ $(p \neq 0)$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{4p} \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = -\dfrac{x_V}{2p} \\ E = -1 \\ F = \dfrac{{x_V}^2}{4p} + y_V \end{array}}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \qquad a \neq 0$$

$$x \in R$$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA EXPLÍCITA

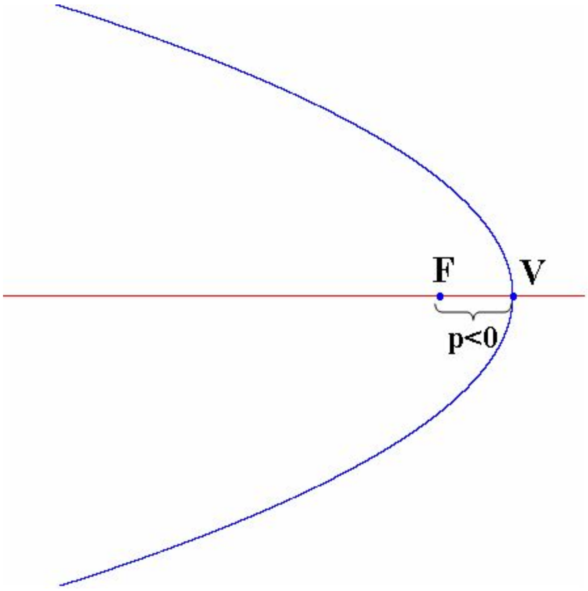
$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{4p} \\ b &= -\frac{x_V}{2p} \\ c &= \frac{{x_V}^2}{4p} + y_V \end{aligned}}$$

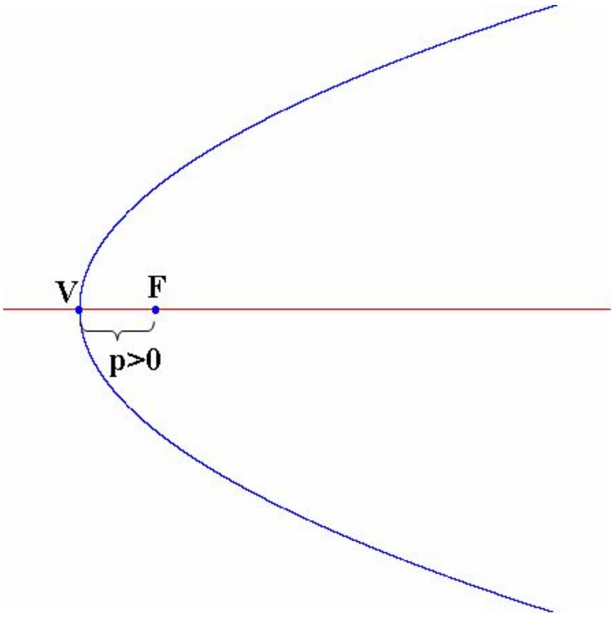
DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{1}{4a} \\ x_V &= -\frac{b}{2a} \\ y_V &= c - \frac{b^2}{4a} \\ x_F &= x_V \\ y_F &= y_V + p \end{aligned}}$$

PARÁBOLA

Eje de simetría HORIZONTAL





	x_V	abscisa del vértice
	y_V	ordenada del vértice
DATOS	x_F	abscisa del foco
	$(x_F \neq x_V)$	

Parámetro auxiliar: $\boxed{p = x_F - x_V}$ $(p \neq 0)$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 1 \\ D = -4p \\ E = -2y_V \\ F = {y_V}^2 + 4px_V \end{array}}$$

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = \pm 2\sqrt{p\left(x - x_V\right)} + y_V}$$

$$si \quad p > 0: \quad x \geq x_V$$

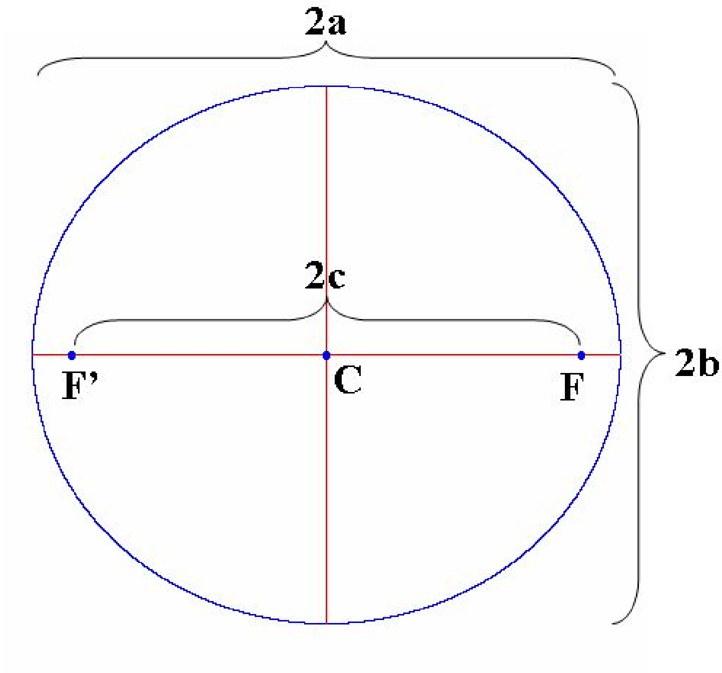
$$si \quad p < 0: \quad x \leq x_V$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} p = -\dfrac{D}{4} \\ x_V = \dfrac{E^2 - 4F}{4D} \\ y_V = -\dfrac{E}{2} \\ x_F = x_V + p \\ y_F = y_V \end{array}}$$

ELIPSE

Eje focal HORIZONTAL



	x_C	abscisa del centro
	y_C	ordenada del centro
DATOS	a	semieje mayor
	b	semieje menor
	(a ≥ b>0)	

Parámetro auxiliar: distancia focal 2c $\boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = b^2 \\ B = 0 \\ C = a^2 \\ D = -2b^2 x_C \\ E = -2a^2 y_C \\ F = a^2 {y_C}^2 + b^2 {x_C}^2 - a^2 b^2 \end{array}}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}\right) - AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

Si $a = b \Rightarrow$ Circunferencia

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(x - x_C\right)^2} + y_C}$$

$$x_C - a \le x \le x_C + a$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

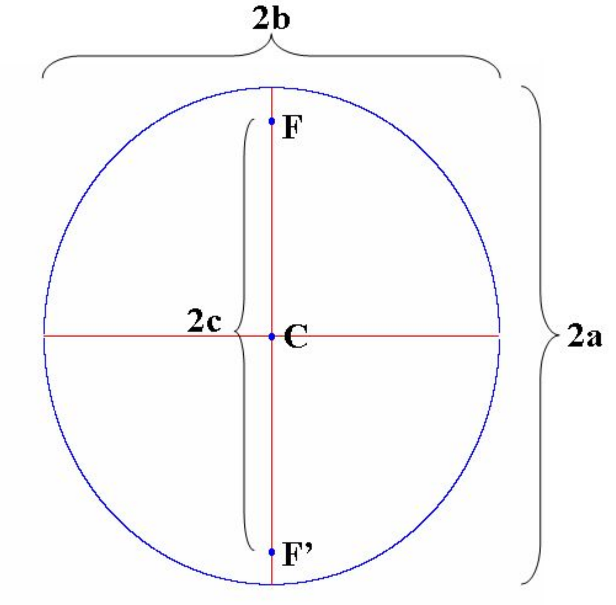
$$\boxed{\begin{array}{l} a = \sqrt{C} \\ b = \sqrt{A} \\ x_C = -\dfrac{D}{2A} \\ y_C = -\dfrac{E}{2C} \end{array}}$$

FOCOS

$$\boxed{\begin{array}{l} x_F = x_C + c \\ y_F = y_C \\ x_{F'} = x_C - c \\ y_{F'} = y_C \end{array}}$$

ELIPSE

Eje focal VERTICAL



DATOS

x_C	abscisa del centro
y_C	ordenada del centro
a	semieje mayor
b	semieje menor
(a ≥ b>0)	

Parámetro auxiliar: distancia focal 2c $\boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = a^2 \\ B = 0 \\ C = b^2 \\ D = -2a^2 x_C \\ E = -2b^2 y_C \\ F = b^2 {y_C}^2 + a^2 {x_C}^2 - a^2 b^2 \end{array}}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}\right) - AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

Si $a = b \Rightarrow$ Circunferencia

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \left(x - x_C\right)^2} + y_C}$$

$$x_C - b \leq x \leq x_C + b$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

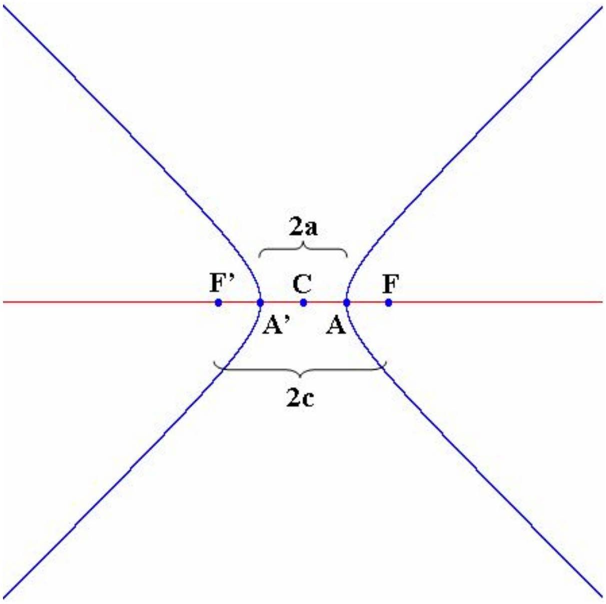
$$\boxed{\begin{array}{l} a = \sqrt{A} \\ b = \sqrt{C} \\ x_C = -\dfrac{D}{2A} \\ y_C = -\dfrac{E}{2C} \end{array}}$$

FOCOS

$$\boxed{\begin{array}{l} x_F = x_C \\ y_F = y_C + c \\ x_{F'} = x_C \\ y_{F'} = y_C - c \end{array}}$$

HIPÉRBOLA

Eje focal HORIZONTAL



DATOS

x_C abscisa del centro

y_C ordenada del centro

$\overleftrightarrow{AA'}$ eje transverso (longitud: 2a)

$\overleftrightarrow{BB'}$ eje normal (longitud: 2b) NOTA: B y B' no son puntos relevantes en el dibujo

$\overleftrightarrow{FF'}$ eje focal (longitud: 2c)

$(c > a > 0)$

Parámetro auxiliar: distancia focal 2c $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A = b^2 \\ B = 0 \\ C = -a^2 \\ D = -2b^2 x_C \\ E = 2a^2 y_C \\ F = b^2 {x_C}^2 - a^2 {y_C}^2 - a^2 b^2 \end{array}}$$

Condición de Existencia: $F = \frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}\right) + AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\left(x - x_C\right)^2 - a^2} + y_C}$$

$$x \leq x_C - a$$

$$x \geq x_C + a$$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \sqrt{-C} \\ b = \sqrt{A} \\ x_C = -\dfrac{D}{2A} \\ y_C = -\dfrac{E}{2C} \end{array}}$$

FOCOS Y VÉRTICES

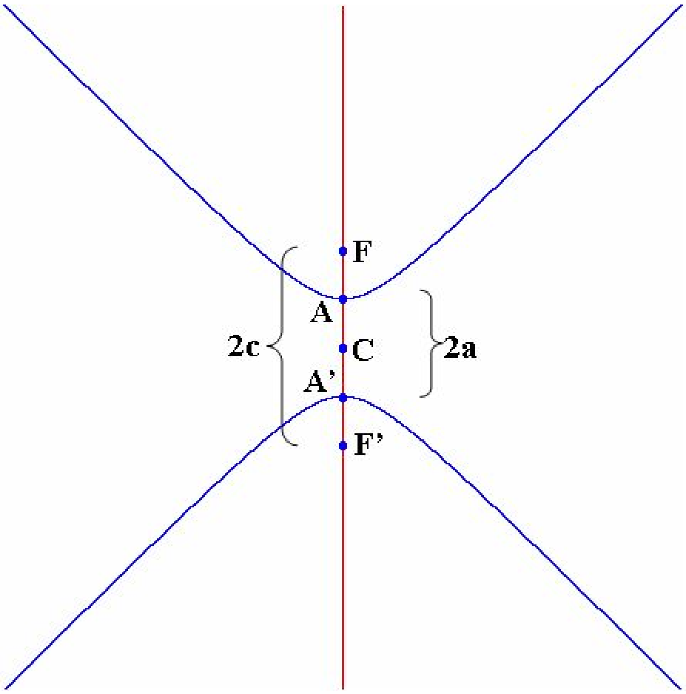
$$\boxed{\begin{array}{l} x_A = x_C + a \\ y_A = y_C \\ x_{A'} = x_C - a \\ y_{A'} = y_C \\ x_F = x_C + c \\ y_F = y_C \\ x_{F'} = x_C - c \\ y_{F'} = y_C \end{array}}$$

ASÍNTOTAS

$$\boxed{y = \pm\frac{b}{a}\left(x - x_C\right) + y_C}$$

HIPÉRBOLA

Eje focal VERTICAL



DATOS

x_C abscisa del centro

y_C ordenada del centro

$\overleftrightarrow{AA'}$ eje transverso (longitud: 2a)

$\overleftrightarrow{BB'}$ eje normal (longitud: 2b) NOTA: B y B' no son puntos relevantes en el dibujo

$\overleftrightarrow{FF'}$ eje focal (longitud: 2c)

$(c > a > 0)$

Parámetro auxiliar: distancia focal 2c $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$

COEFICIENTES DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} A=-a^2 \\ B=0 \\ C=b^2 \\ D=2a^2x_C \\ E=-2b^2y_C \\ F=b^2{y_C}^2-a^2{x_C}^2-a^2b^2 \end{array}}$$

Condición de Existencia: $F=\frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}\right)+AC$ (ver un análisis exhaustivo de esta condición al final de la monografía)

FÓRMULA EXPLÍCITA

$$\boxed{y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{\left(x-x_C\right)^2+b^2}+y_C}$$

$x\in R$

DATOS A PARTIR DE LA FÓRMULA IMPLÍCITA

$$\boxed{\begin{array}{l} a=\sqrt{-A} \\ b=\sqrt{C} \\ x_C=-\dfrac{D}{2A} \\ y_C=-\dfrac{E}{2C} \end{array}}$$

FOCOS Y VÉRTICES

$$\boxed{\begin{array}{l} x_A=x_C \\ y_A=y_C+a \\ x_{A'}=x_C \\ y_{A'}=y_C-a \\ x_F=x_C \\ y_F=y_C+c \\ x_{F'}=x_C \\ y_{F'}=y_C-c \end{array}}$$

ASÍNTOTAS

$$\boxed{y=\pm\frac{a}{b}\left(x-x_C\right)+y_C}$$

Análisis especial de la condición de existencia en elipse e hipérbola (realizado por Rodrigo Farinha)

Fórmula "Normal": $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

A veces A, C, D, E y F tienen $MCD \neq 1$, con lo cual la fórmula puede expresarse en forma "Reducida", en vez de "Normal".

Fórmula "Reducida": $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$

Donde (le llamo k al MCD, $k \neq 1$):

$$A' = \frac{A}{k} \quad C' = \frac{C}{k} \quad D' = \frac{D}{k} \quad E' = \frac{E}{k} \quad F' = \frac{F}{k} \qquad (1)$$

Si intento deducir los datos característicos de la cónica a partir de esta fórmula reducida en vez de la normal, casi todo da mal:

Por ejemplo en la **elipse con eje focal horizontal**:

Desde la fórmula Normal: $a = \sqrt{C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $a' = \sqrt{C'} = \sqrt{\frac{C}{k}} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}} = \frac{a}{\sqrt{k}} \neq a$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $b = \sqrt{A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $b' = \sqrt{A'} = \sqrt{\frac{A}{k}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{k}} = \frac{b}{\sqrt{k}} \neq b$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $x_C = -\frac{D}{2A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $x'_C = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{\frac{D}{\cancel{k}}}{2\frac{A}{\cancel{k}}} = -\frac{D}{2A} = x_C$ (bien)

Desde la fórmula Normal: $y_C = -\frac{E}{2C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $y'_C = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{\frac{E}{\cancel{k}}}{2\frac{C}{\cancel{k}}} = -\frac{E}{2C} = y_C$ (bien)

Para las elipses debe cumplirse: $F = \frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}\right) - AC$ (2)

Si la fórmula que se me proporciona como dato es la "reducida", tendré como datos A', C', etc, pero no A, C, etc.
Necesito saber cuánto vale el **k** que se usó para la "reducción" de la fórmula.
Sé que en la fórmula "normal" (de la que desconozco sus coeficientes) deberá cumplirse la condición (2).

Utilizando (1) y sustituyendo en (2):

$$kF' = \frac{1}{4}\left(\frac{k^{\cancel{2}} D'^2}{\cancel{k} A'} + \frac{k^{\cancel{2}} E'^2}{\cancel{k} C'}\right) - kA'.kC'$$

$$\cancel{k} F' = \frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{k} D'^2}{A'} + \frac{\cancel{k} E'^2}{C'}\right) - kA'.\cancel{k} C'$$

$$F' = \frac{1}{4}\left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}\right) - kA'C'$$

(o sea que la relación (2) NO ES INVARIANTE al reducir la fórmula)

Pero de aquí puedo despejar k en base a los coeficientes que tengo (los de la fórmula "reducida"):

$$\boxed{k = \frac{F' - \frac{1}{4}\left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}\right)}{-A'C'}}$$

Con ese valor y (1) podré hallar los coeficientes de la fórmula normal, los cuales necesito para poder obtener correctamente los datos característicos de la elipse:

$$\boxed{A = kA' \qquad C = kC' \qquad D = kD' \qquad E = kE' \qquad F = kF'}$$

Esto también sucede si se analiza la **elipse con eje focal vertical**.

Ahora detallaré el análisis de la **hipérbola con eje focal horizontal** (sucede algo muy parecido):

Desde la fórmula Normal: $a = \sqrt{-C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $a' = \sqrt{-C'} = \sqrt{-\frac{C}{k}} = \frac{\sqrt{-C}}{\sqrt{k}} = \frac{a}{\sqrt{k}} \neq a$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $b = \sqrt{A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $b' = \sqrt{A'} = \sqrt{\frac{A}{k}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{k}} = \frac{b}{\sqrt{k}} \neq b$ (mal)

Desde la fórmula Normal: $x_C = -\frac{D}{2A}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $x'_C = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{\frac{D}{\cancel{k}}}{2\frac{A}{\cancel{k}}} = -\frac{D}{2A} = x_C$ (bien)

Desde la fórmula Normal: $y_C = -\frac{E}{2C}$

Si intento desde la fórmula Reducida: $y'_C = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{\frac{E}{\cancel{k}}}{2\frac{C}{\cancel{k}}} = -\frac{E}{2C} = y_C$ (bien)

Para las hipérbolas debe cumplirse: $F = \frac{1}{4}\left(\frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}\right) + AC$ (3)

Si la fórmula que se me proporciona como dato es la “reducida”, tendré como datos A’, C’, etc, pero no A, C, etc.
Necesito saber cuánto vale el **k** que se usó para la “reducción” de la fórmula.
Sé que en la fórmula “normal” (de la que desconozco sus coeficientes) deberá cumplirse la condición (3).

Utilizando (1) y sustituyendo en (3):

$$kF' = \frac{1}{4}\left(\frac{k^{\cancel{2}}D'^2}{\cancel{k}A'} + \frac{k^{\cancel{2}}E'^2}{\cancel{k}C'}\right) + kA'.kC'$$

$$\cancel{k}F' = \frac{1}{4}\left(\frac{\cancel{k}D'^2}{A'} + \frac{\cancel{k}E'^2}{C'}\right) + kA'.\cancel{k}C'$$

$$F' = \frac{1}{4}\left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}\right) + kA'C'$$

(o sea que la relación (3) NO ES INVARIANTE al reducir la fórmula)

Pero de aquí puedo despejar k en base a los coeficientes que tengo (los de la fórmula “reducida”):

$$\boxed{k = \frac{F' - \frac{1}{4}\left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}\right)}{A'C'}}$$

Con ese valor y (1) podré hallar los coeficientes de la fórmula normal, los cuales necesito para poder obtener correctamente los datos característicos de la hipérbola:

$$\boxed{A = kA' \qquad C = kC' \qquad D = kD' \qquad E = kE' \qquad F = kF'}$$

Esto también sucede si se analiza la **hipérbola con eje focal vertical**.

Ejemplo ilustrativo

Sea una hipérbola con eje focal horizontal que tiene las siguientes características:

$a = 6$

$b = 4$

$x_C = -4$

$y_C = 1$

Utilizo las fórmulas de cálculo de los coeficientes que están en la página 14:

$A = b^2 = 4^2 = 16$

$B = 0$

$C = -a^2 = -6^2 = -36$

$D = -2b^2 x_C = -2.4^2.(-4) = 128$

$E = 2a^2 y_C = 2.6^2.(1) = 72$

$F = b^2 x_C{}^2 - a^2 y_C{}^2 - a^2 b^2 = 4^2.(-4)^2 - 6^2.1^2 - 6^2.4^2 = -356$

$16x^2 - 36y^2 + 128x + 72y - 356 = 0$ Esta es la fórmula "Normal".

Todos sus coeficientes son múltiplos de 4 (dicho de otra forma, 4 es el MCD de todos ellos).
Así que la fórmula se puede "reducir":

$4x^2 - 9y^2 + 32x + 18y - 89 = 0$ Esta es la fórmula "Reducida".

Veamos cómo utilizando los coeficientes de la fórmula Normal en las fórmulas de cálculo de datos de la página 14, se vuelve a los valores de a, b, x_C, y_C:

$a = \sqrt{-C} = \sqrt{-(-36)} = 6$

$b = \sqrt{A} = \sqrt{16} = 4$

$x_C = -\dfrac{D}{2A} = -\dfrac{128}{2(16)} = -4$

$y_C = -\dfrac{E}{2C} = -\dfrac{72}{2(-36)} = 1$

Veamos cómo utilizando los coeficientes de la fórmula Reducida en las fórmulas de cálculo de datos de la página 14, se vuelve a los valores de x_C, y_C, pero no a los de a,b:

$$a' = \sqrt{-C'} = \sqrt{-(-9)} = 3 \neq 6$$
$$b' = \sqrt{A'} = \sqrt{4} = 2 \neq 4$$
$$x'_C = -\frac{D'}{2A'} = -\frac{32}{2(4)} = -4$$
$$y'_C = -\frac{E'}{2C'} = -\frac{18}{2(-9)} = 1$$

O sea que a partir de la fórmula Reducida, hay problemas para hallar a y b originales.
Esto se soluciona calculando k:

$$k = \frac{F' - \frac{1}{4}\left(\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}\right)}{A'C'} = \frac{-89 - \frac{1}{4}\left(\frac{32^2}{4} + \frac{18^2}{-9}\right)}{(4).(-9)} = 4$$

Entonces:

$$A = kA' = 4(4) = 16$$
$$C = kC' = 4(-9) = -36$$
$$D = kD' = 4(32) = 128$$
$$E = kE' = 4(18) = 72$$
$$F = kF' = 4(-89) = -356$$

Y, como ya se comprobó, a partir de esos valores de A, C, D, E y F se pueden hallar correctamente a, b, x_C, y_C

RECONOCIMIENTO DE CÓNICAS

Se trata de, dada una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, determinar si es una cónica real (verdadera). Y si lo es, clasificarla y determinar su centro (si lo tiene) y cuánto está girada respecto a los ejes de coordenadas.

Los siguientes son los pasos a seguir:

$$M = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \qquad N = B^2 - 4AC \qquad S = A + C$$

$$\begin{aligned} &Si\ N < 0\ \ y\ \ M.S < 0 && \rightarrow && ELIPSE\ \ REAL \\ &Si\ N > 0\ \ y\ \ M \neq 0 && \rightarrow && HIPÉRBOLA\ \ REAL \\ &Si\ N = 0\ \ y\ \ M \neq 0 && \rightarrow && PARÁBOLA\ \ REAL \end{aligned}$$

a) Si es <u>elipse o hipérbola</u>, hallar su **centro** $\left(x_C, y_C\right)$:

$$x_C = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} \qquad y_C = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}$$

Y hallar su **ángulo de rotación** w :

$$Si \begin{cases} B \neq 0 \quad \rightarrow \quad Si \begin{cases} A \neq C \quad \rightarrow \quad tg(2w) = \dfrac{B}{A - C} \\ A = C \quad \rightarrow \quad w = 45^{\circ} \end{cases} \\ B = 0 \quad \rightarrow \quad \text{La cónica no está rotada} \end{cases}$$

b) Si es <u>parábola</u>, hallar su **ángulo de rotación** w :

$$Si \begin{cases} B \neq 0 \quad \rightarrow \quad tg\, w = \dfrac{-2A}{B} \\ B = 0 \quad \rightarrow \quad \text{La cónica no está rotada} \end{cases}$$

Bibliografía consultada

"Geometría Analítica", Gustavo A. Duffour, Séptima edición.