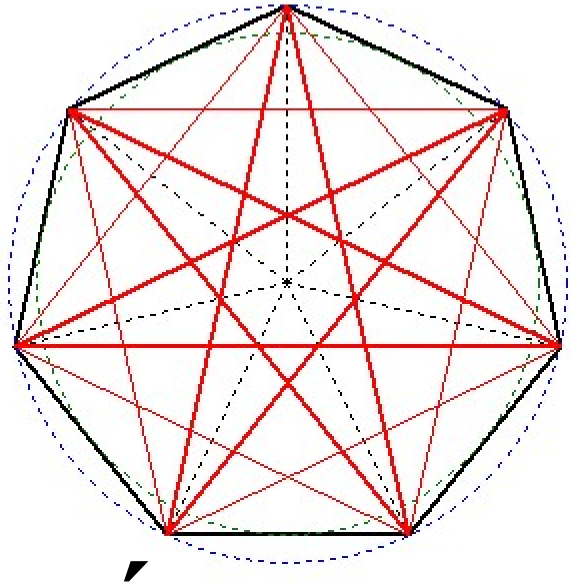
GEOMETRÍA



ESTUDIO ANALÍTICO DE POLÍGONOS REGULARES

Escrito por:

Prof. Arturo Rodrigo Farinha

Índice

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es documentar de una forma exhaustiva y lo más detallada posible todo lo necesario para obtener fórmulas analíticas que permitan calcular varias magnitudes importantes de un polígono regular solamente conociendo cuántos lados tiene y cuánto miden. Espero que sea de utilidad.

Observaciones:

* Para seguir el desarrollo matemático que se propone a continuación, se asume que el lector conoce lo siguiente: nociones elementales de geometría plana, análisis de triángulos, operatoria algebraica, nociones básicas de trigonometría, Teorema de Pitágoras, límite, infinito, coordenadas polares y cartesianas, parte entera, independencia de parámetros.

* Trabajo con ángulos en grados (excepto en la fórmula de f_C), así que para calcular los senos, cosenos y tangentes que aparecen en las fórmulas mediante una calculadora científica, debe estar en el modo DEG (grados sexagesimales), no en modo RAD (radianes).

* Al final analizo ventajas y desventajas de la fórmula “perímetro por apotema sobre dos”

* Planteo los desarrollos matemáticos en forma rigurosa y detallada.

* Todo el desarrollo lo hice por mi cuenta, sin consulta alguna (ni a persona, ni bibliográfica, ...).

Qué se conoce del polígono (datos)

n *cantidad de lados* $n \geq 3$

l *longitud del lado* $l > 0$

Qué quiero hallar
(lo marcado con * son magnitudes relevantes solo para el procesamiento computacional del dibujo del polígono; así que si no le interesa puede saltear el cálculo de esas magnitudes)

α_C ángulo en centro (es el ángulo desde el centro del polígono hacia un lado)

α_V ángulo en vértice (es el ángulo interior formado por dos lados consecutivos)

R radio externo (radio de la circunferencia circunscripta al polígono)

r radio interno (radio de la circunferencia inscripta en el polígono)

p perímetro del polígono

A área del polígono

c_d cantidad de diagonales internas del polígono (cuando no es un triángulo)

c_{dp} cantidad de diagonales principales (diagonales internas de longitud máxima)

l_{dp} longitud de las diagonales principales

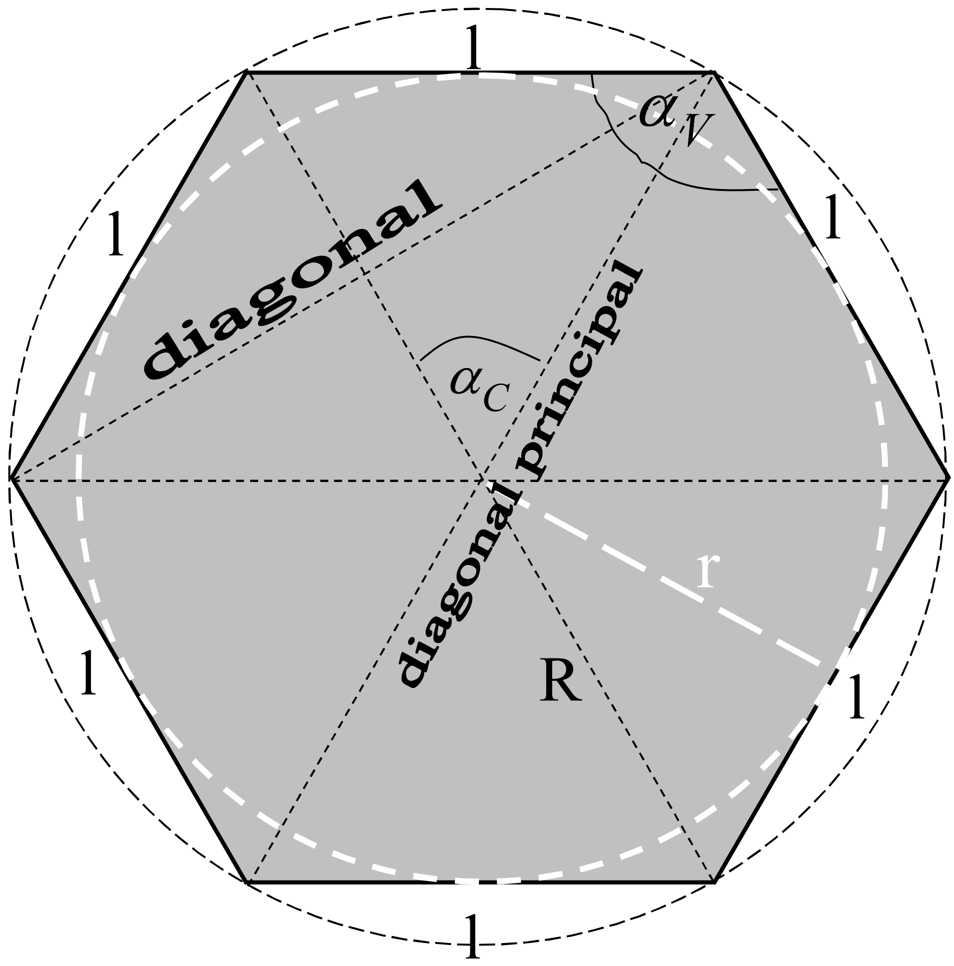
c_{Vdp} cada cuántos vértices hay que unir para obtener las diagonales principales *

f_C factor circular (indica mediante un % cuánto se "parece" el polígono regular a una circunferencia (la circunscripta))

V_i un vértice cualquiera del polígono *

$$\left.\begin{array}{ll} x_{V_i} & \text{abscisa del vértice } V_i \\ y_{V_i} & \text{ordenada del vértice } V_i \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c} \text{respecto a un sistema de ejes cartesiano} \\ \text{cuyo origen coincide con el centro del polígono} \end{array}\right)^{*}$$

HEXÁGONO



Observando los polígonos regulares de 3, 4, 5, ... lados, deduje fórmulas generales para calcular ciertos parámetros de un polígono de n lados.

lados	α_C	α_V	p	c_d	c_{dp}	l_{dp}	c_{Vdp}
3	120º	60º	3 l	0	0	-	-
4	90º	90º	4 l	2	2	2R	2
5	72º	108º	5 l	5	5	?	2
6	60º	120º	6 l	9	3	2R	3
7			7 l	14	7	?	3
8			8 l	20	4	2R	4
9			9 l	27	9	?	4
...	...	...	...	...	...	...	...
n	$\frac{360}{n}$	$180\left(\frac{n-2}{n}\right)$	$n\,l$	$\frac{n(n-3)}{2}$	$0 \quad (n=3)$ $\frac{n}{2} \quad (n \ par > 3)$ $n \quad (n \ impar > 3)$	$2R \quad (n \ par)$ $? \quad (n \ impar > 3)$	$P.Entera\left(\frac{n}{2}\right)$ $(n > 3)$

Resumiendo:

$$\boxed{\alpha_C = \frac{360}{n}} \qquad \boxed{\alpha_V = 180\left(\frac{n-2}{n}\right)} \qquad \boxed{p = n\,l}$$

$$\boxed{c_d = \frac{n(n-3)}{2}} \qquad \boxed{c_{dp} = \begin{cases} 0 & (n=3) \\ \frac{n}{2} & (n \ par > 3) \\ n & (n \ impar > 3) \end{cases}}$$

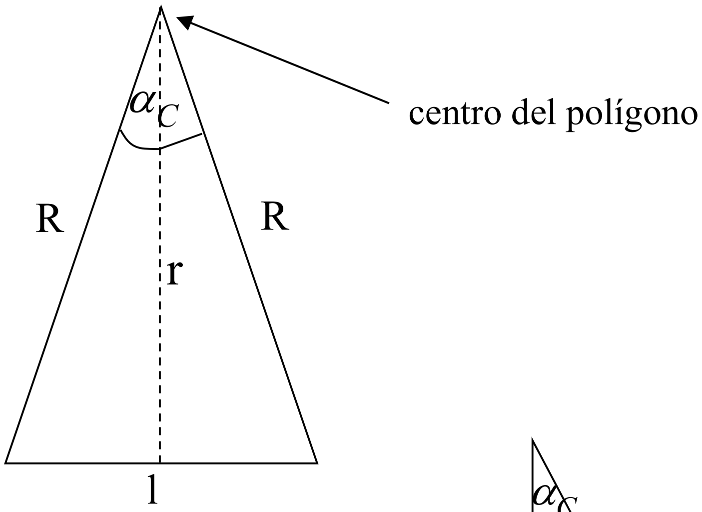
$$\boxed{l_{dp} = \begin{cases} 2R & (n \ par) \\ ? & (n \ impar > 3) \end{cases}} \qquad \boxed{c_{Vdp} = P.Entera\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (n > 3)}$$

Aclaración:

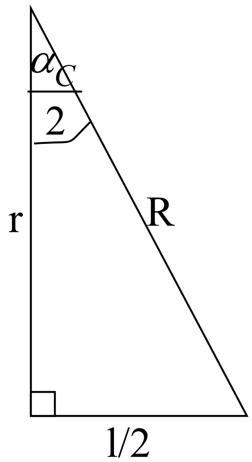
$P.Entera\left(\frac{n}{2}\right)$ es la parte entera del número $\frac{n}{2}$

Cálculo de R

Cualquier polígono regular de n lados ($n \geq 3$) se puede descomponer en n triángulos isósceles que poseen las siguientes medidas:



De dicho triángulo se obtiene el siguiente triángulo rectángulo:



De ahí se obtiene:

$$R\,sen\left(\frac{\alpha_C}{2}\right) = \frac{l}{2}$$

$$R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{\alpha_C}{2}\right)}$$

Sustituyo α_C:

$$R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{\frac{360}{n}}{2}\right)}$$

$$\boxed{R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}}$$

Inscribir un polígono regular en una circunferencia dada

Un planteo interesante y útil para analizar es aquel en el que se pide hallar cuánto tiene que medir el lado de un polígono regular de n lados (dato dado) para que quede inscripto en una circunferencia de radio R (dato dado).

Que el polígono regular quede inscripto en una circunferencia, significa que esta es la circunferencia circunscripta al polígono. Así que puedo utilizar la fórmula de cálculo de R (radio de la circunferencia circunscripta):

$$R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Despejo l:

$$\boxed{l = 2\,R\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Cálculo de r

Considerando nuevamente el triángulo rectángulo utilizado en el cálculo de R, pero ahora teniendo en cuenta que se quiere hallar r, se obtiene:

$$r = R\cos\left(\frac{\alpha_C}{2}\right)$$

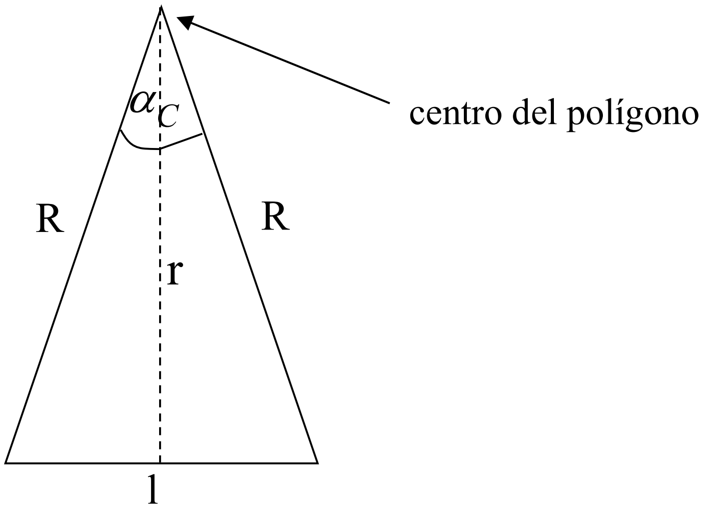
Sustituyo R y α_C:

$$r = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}\cos\left(\frac{\frac{360}{n}}{2}\right) = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}\cos\left(\frac{180}{n}\right) = \frac{l}{2\frac{sen\left(\frac{180}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180}{n}\right)}} = \frac{l}{2\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

$$\boxed{r = \frac{l}{2\tan\left(\frac{180}{n}\right)}}$$

Cálculo de A

Cualquier polígono regular de n lados ($n \geq 3$) se puede descomponer en n triángulos isósceles que poseen las siguientes medidas:



Entonces el área del polígono será n veces el área de este triángulo:

$$A_{polígono} = n\,A_{triángulo} = n\left(\frac{l\,r}{2}\right) = \frac{n\,l\,r}{2}$$

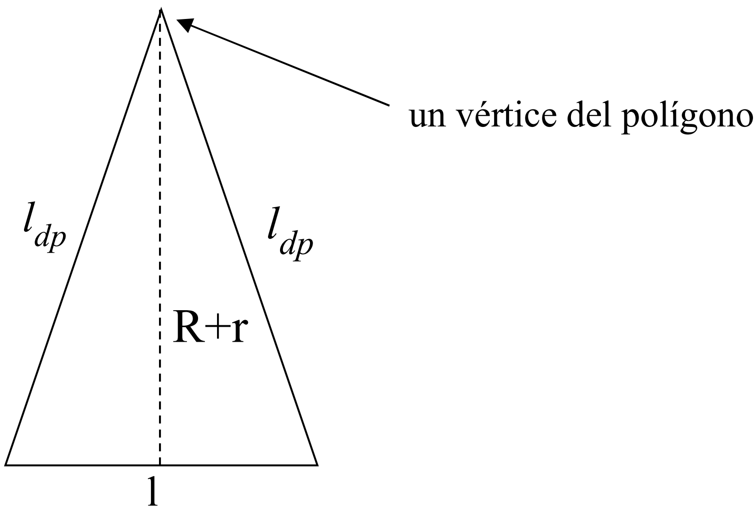
Sustituyo r:

$$A = \frac{n\,l\left[\dfrac{l}{2\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}\right]}{2}$$

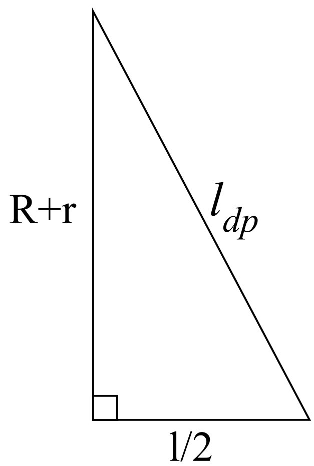
$$\boxed{A = \frac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}}$$

Cálculo de l_{dp} (para n impar)

En cualquier polígono regular de n lados (n impar > 3) se puede obtener un triángulo isósceles que posee las siguientes medidas:



De dicho triángulo se obtiene el siguiente triángulo rectángulo:



Aplico Teorema de Pitágoras:

$$l_{dp}{}^{2} = \left(\frac{l}{2}\right)^{2} + \left(R+r\right)^{2}$$

Sustituyo R y r:

$$l_{dp}^{2}=\left(\frac{l}{2}\right)^{2}+\left(\frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}+\frac{l}{2\tan\left(\frac{180}{n}\right)}\right)^{2}=\left(\frac{l}{2}\right)^{2}+\left(\frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}+\frac{l}{2\frac{sen\left(\frac{180}{n}\right)}{\cos\left(\frac{180}{n}\right)}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{l}{2}\right)^{2}+\left(\frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}+\frac{l\cos\left(\frac{180}{n}\right)}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}\right)^{2}=\left(\frac{l}{2}\right)^{2}+\left[\frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}\left(1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right)\right]^{2}=$$

$$=\frac{l^{2}}{4}+\frac{l^{2}}{4\,sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\left(1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right)^{2}=\frac{l^{2}}{4}\left[1+\frac{\left(1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right)^{2}}{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\right]=$$

$$=\frac{l^{2}}{4}\left[\frac{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)+1+\cos^{2}\left(\frac{180}{n}\right)+2\cos\left(\frac{180}{n}\right)}{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\right]$$

Aplico la relación fundamental trigonométrica: $sen^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha=1$

$$l_{dp}^{2}=\frac{l^{2}}{4}\left[\frac{1+1+2\cos\left(\frac{180}{n}\right)}{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\right]=\frac{l^{2}}{4}\left[\frac{2+2\cos\left(\frac{180}{n}\right)}{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\right]=\frac{l^{2}}{\cancel{4}_{2}}\frac{\cancel{2}}{sen^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\left[1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]$$

Aplico un despeje de la relación fundamental trigonométrica: $sen^{2}\alpha=1-\cos^{2}\alpha$

$$l_{dp}^{2}=\frac{l^{2}}{2}\frac{1}{1-\cos^{2}\left(\frac{180}{n}\right)}\left[1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]$$

Aplico producto de suma por diferencia: $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$

$$l_{dp}^{2}=\frac{l^{2}}{2}\frac{1}{\left[1-\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]\cancel{\left[1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}}\cancel{\left[1+\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}=\frac{l^{2}}{2}\frac{1}{\left[1-\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}=\frac{l^{2}}{2\left[1-\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}$$

$$l_{dp}=+\sqrt{\frac{l^{2}}{2\left[1-\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}}$$

$$\boxed{l_{dp}=\frac{l}{\sqrt{2\left[1-\cos\left(\frac{180}{n}\right)\right]}}}$$

Cálculo de f_C

Inventé este indicador con cierto propósito. Desconozco si ya existe (es probable que sí, así que no pretendo ningún crédito al respecto).

f_C es el "factor circular" e indica mediante un % cuánto se "parece" el polígono regular a una circunferencia (la circunscripta). Esto surgió del hecho de que a una circunferencia se la puede considerar como un polígono regular muy particular (tendría infinitos lados de longitud infinitesimal). Por eso este factor se basa en la comparación de las áreas del polígono y del círculo cuyo borde es la circunferencia circunscripta al polígono.

Para comenzar establezco cómo estarán relacionados la cantidad de lados y el factor para las dos situaciones más extremas:

n	f_C
2	0%
$+\infty$	100%

Considero que, como para n = 2 no hay polígono, f_C debe valer 0%.

Considero que cuando $n \to +\infty$, $f_C \to 100\%$

Así que defino f_C de la siguiente manera:

$$\boxed{f_C = 100\frac{A_{polígono}}{A_{círculo}}}$$

Anteriormente se determinó que $A_{polígono} = \dfrac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}$

Y se sabe que el área del círculo cuyo borde es la circunferencia circunscripta es $A_{círculo} = R^2\pi$

Sustituyo:

$$f_C = 100\frac{\dfrac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}}{R^2\pi}$$

Sustituyo R:

$$f_C = 100 \frac{\dfrac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}}{\left(\dfrac{l}{2\,sen\left(\dfrac{180}{n}\right)}\right)^2 \pi} = 100 \frac{\dfrac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}}{\dfrac{l^2}{4\,sen^2\left(\dfrac{180}{n}\right)}\pi} = 100 \frac{n\,\cancel{l^2}}{\cancel{4}\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)} \frac{\cancel{4}\,sen^2\left(\dfrac{180}{n}\right)}{\cancel{l^2}\,\pi} =$$

$$= 100 \frac{n}{\dfrac{\cancel{sen\left(\dfrac{180}{n}\right)}}{\cos\left(\dfrac{180}{n}\right)}} \frac{sen^{\cancel{2}}\left(\dfrac{180}{n}\right)}{\pi} = 100\,n \frac{sen\left(\dfrac{180}{n}\right)\cos\left(\dfrac{180}{n}\right)}{\pi}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$

$$f_C = 100\,n \frac{\dfrac{sen\left(2\dfrac{180}{n}\right)}{2}}{\pi} = 100\,n \frac{sen\left(\dfrac{360}{n}\right)}{2\pi} = 100 \frac{n}{2\pi} sen\left(\dfrac{360}{n}\right)$$

Para que no queden mezclados grados y radianes, convierto los 360º a radianes:

$$f_C = \cancel{100}^{50} \frac{n}{\cancel{2}\pi} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{50\,n}{\pi} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

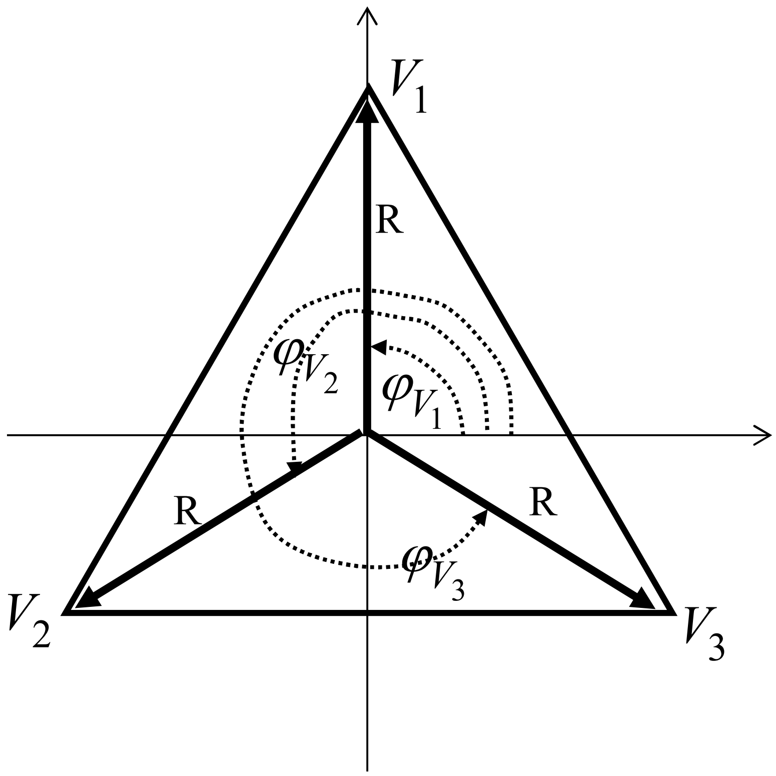
$$\boxed{f_C = \frac{50\,n}{\pi} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

Ejemplos:

n	f_C
2	0%
3	41,3%
4	63,7%
5	75,7%
10	93,5%
20	98,4%
100	99,9%
$+\infty$	100%

Cálculo de x_{V_i} e y_{V_i} (para dibujar el polígono por computadora)

Para fijar ideas estudio el triángulo equilátero (n = 3)
Lo dibujo en un sistema de ejes cartesiano de tal forma que el origen de coordenadas coincida con el centro del triángulo y quede horizontal uno de sus lados (la "base").
Los 3 vértices V_1 , V_2 , V_3 , considerándolos en un sistema de coordenadas polares, tienen módulo R y argumentos φ_{V_1} , φ_{V_2} , φ_{V_3} respectivamente.



Teniendo en cuenta que en este caso $\alpha_C = 120^{\circ}$ y $\alpha_V = 60^{\circ}$, es posible notar que:

$$\varphi_{V_1} = 90^{\circ} = 120^{\circ} - 30^{\circ} = \alpha_C - \frac{\alpha_V}{2}$$

$$\varphi_{V_2} = \varphi_{V_1} + \alpha_C = 2\alpha_C - \frac{\alpha_V}{2}$$

$$\varphi_{V_3} = \varphi_{V_2} + \alpha_C = 3\alpha_C - \frac{\alpha_V}{2}$$

Generalizando:

$$\varphi_{V_i} = i\,\alpha_C - \frac{\alpha_V}{2} \qquad donde\ i = 1,2,3$$

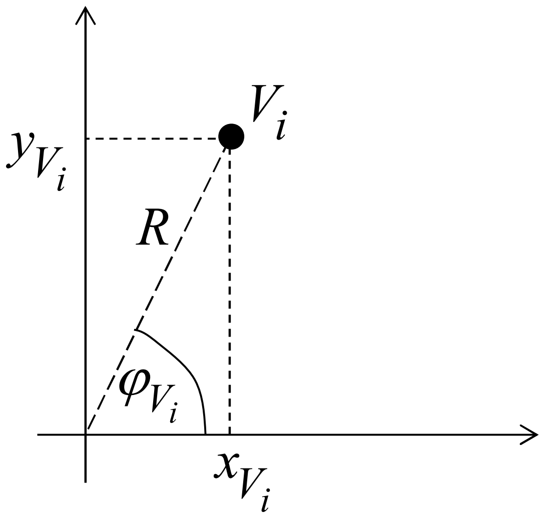
Se puede comprobar que esto funciona perfectamente para otros polígonos regulares (quedando siempre uno de sus lados como “base”).
Así que, generalizando a n lados y sustituyendo α_C y α_V :

Vértices del polígono regular: V_1 , V_2 , V_3 , ... , V_n

$$\varphi_{V_i} = i\left(\frac{360}{n}\right) - \frac{180\left(\frac{n-2}{n}\right)}{2} = i\left(\frac{360}{n}\right) - 90\left(\frac{n-2}{n}\right) = \frac{90}{n}\left(4i - n + 2\right) \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, n$$

$$\boxed{\varphi_{V_i} = \frac{90}{n}\left(4i - n + 2\right) \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, n}$$

Así que, ahora que se conocen las coordenadas polares de cada vértice (módulo y argumento), se pueden hallar sus coordenadas cartesianas (abscisa y ordenada):



$$\boxed{\begin{aligned} x_{V_i} &= R\cos\left(\varphi_{V_i}\right) \\ y_{V_i} &= R\,sen\left(\varphi_{V_i}\right) \end{aligned}}$$

En la página 7 se halló la fórmula de cálculo de R:

$$R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Cuidado con la fórmula "perímetro por apotema sobre dos"

Desde la primaria se enseña y aplica una fórmula para calcular el área de cualquier polígono regular, especialmente los de más de 4 lados:

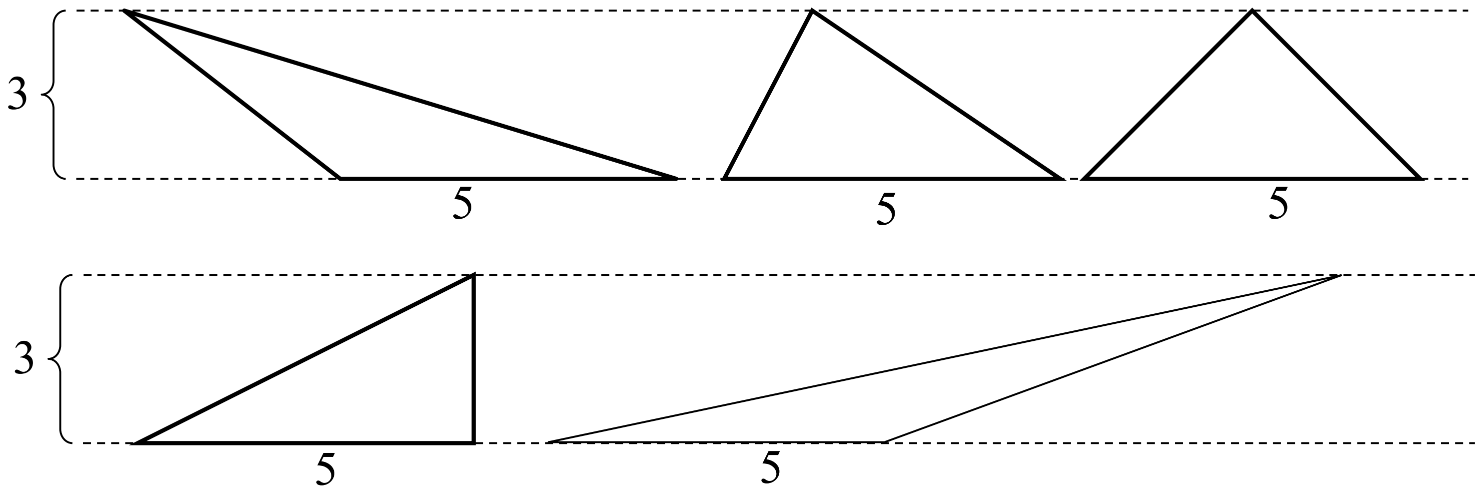
$$A_{polígono} = \frac{perímetro \text{ x } apotema}{2}$$

La cual tiene 2 ventajas: es fácil de recordar y de demostrar (sumando áreas de triángulos isósceles). Pero también tiene una desventaja importante...

Por un momento me aparto de esta línea de razonamiento para analizar la fórmula que calcula el área de un triángulo cualquiera:

$$A_{triángulo} = \frac{base \text{ x } altura}{2}$$

Podemos inventar el triángulo que se nos ocurra dando valores positivos cualesquiera a base y a altura. Por ejemplo base 5 y altura 3:



Se observa que, a los efectos de la **construcción** de un triángulo (*no me interesa su área*), **<u>la base y la altura son totalmente independientes entre sí</u>**. Es decir que dada cierta base (utilizando la palabra como medida), se puede inventar cualquier altura (utilizando la palabra como medida) positiva: existirán infinitos triángulos que tengan dichas medidas. Lo mismo si se da la altura, podemos inventar cualquier base.

Es por eso que la fórmula $A_{triángulo} = \frac{base \text{ x } altura}{2}$ no solamente es sencilla y fácil de recordar, más importante aún: es definitiva, no puede continuarse "mejorándola" ya que en ella figuran solamente constantes numéricas y **parámetros independientes entre sí**.

Volviendo a la fórmula $A_{polígono} = \frac{perímetro \text{ x } apotema}{2}$, su gran desventaja es que en libros, formularios, agendas, etc. es presentada como una fórmula definitiva, final, “lista para usar”.
Cuando en realidad es una fórmula semi-cruda, ya que los dos parámetros que en ella figuran **no son independientes entre sí**.
En Matemática, siempre que se pueda, a una fórmula que calcula algo se la presenta en forma final, definitiva, relacionando solamente parámetros independientes entre sí.
Además la estructura de la fórmula $A_{polígono} = \frac{perímetro \text{ x } apotema}{2}$ es igual a la del área del triángulo, lo que podría reforzar el malentendido e inducir a suponer que como perímetro y apotema se pueden poner dos valores cualesquiera.

Que quede claro que no estoy diciendo que esa fórmula esté mal. Está bien, pero podría mejorarse. No solo para “honrar al formalismo matemático”, sino para que deje de ser potencialmente mal interpretada y usada.

Supongamos que un maestro o un profesor de Matemática tuvo un mal día e inventó para sus alumnos el siguiente ejercicio: *Calcular el área de un pentágono cuyo perímetro es 100 cm y su apotema es 10 cm.*

Los alumnos harán la siguiente cuenta:

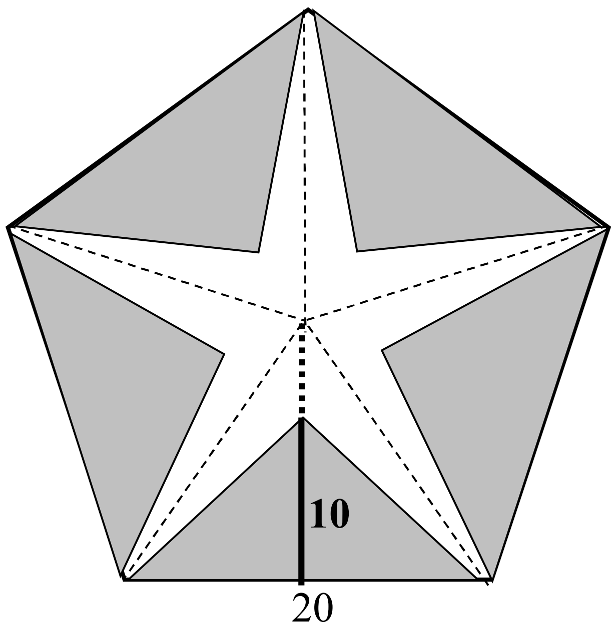
$$A = \frac{100 \text{ x } 10}{2} = 500\,cm^2$$

¿Es esa el área del pentágono?
Una pregunta más básica: *¿existe ese pentágono?*
De no ser así: *¿el área de qué se calculó?*

Sucedió lo siguiente:

No existe un pentágono que cumpla con esos datos.
Se calculó el área total de 5 triángulos isósceles que no componen a ningún pentágono.
Para que exista el pentágono de perímetro 100, la apotema debe valer 13,763819... , no 10.

Y si se hubiera utilizado como “apotema” un valor mayor al correcto (15 por ejemplo), lo que se estaría calculando sería el área total de otros 5 triángulos isósceles que tampoco componen un pentágono.



Entonces veamos si se puede mejorar esa fórmula...

Cuando en su momento hallé la fórmula del área (página 10), en cierta parte del proceso llegué a lo siguiente:

$$A_{polígono} = \frac{n\,l\,r}{2}$$

Está claro que nl es el perímetro del polígono.
Recuérdese que le llamé r al radio de la circunferencia inscripta en el polígono; por otro lado la apotema es definida como la distancia del centro del polígono a un lado cualquiera del mismo.
Mirando el dibujo de la página 5 se observa que son la misma cosa: lo que llamé r es la apotema del polígono.

Resumiendo:

$$n\,l = p \qquad r = a \qquad \rightarrow \qquad A_{polígono} = \frac{p\,a}{2}$$

Llegamos a la famosa fórmula, la cual continué procesando porque, como ya dije, p y a no son independientes entre sí (p depende de n y l; lo mismo sucede con a (r)).

Se llegó a que la fórmula final es: $A = \dfrac{n\,l^2}{4\tan\left(\dfrac{180}{n}\right)}$ donde n y l son independientes entre sí.

Observando esta última fórmula es fácil ver los diversos motivos por los cuales no es utilizada en primaria y comienzos de secundaria: es complicada, difícil de recordar, hay que conocer funciones trigonométricas y se necesita calculadora científica.
Así que se prefiere utilizar la famosa fórmula intermedia, la cual es más “amigable” tanto para enseñar como para aprender.

A continuación planteo un enfoque que simplifica bastante dicha fórmula, lo cual **hace viable su uso tanto en primaria como en secundaria**.
Para esto adapto la fórmula mejorada a los datos proporcionados:

1) Datos: n y l

$$A = \frac{n\,l^2}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Obsérvese que esta fórmula puede expresarse de la siguiente forma:

$$\boxed{A = L_n\, l^2}$$

Donde L_n es un factor que depende solamente de n.

$$\boxed{L_n = \frac{n}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)}}$$

2) Datos: n y p

$$n\,l = p \quad \rightarrow \quad l = \frac{p}{n}$$

$$A = \frac{n\left(\frac{p}{n}\right)^2}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{\cancel{n}\,\frac{p^2}{n^{\cancel{2}}}}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{p^2}{4\,n\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Obsérvese que esta fórmula puede expresarse de la siguiente forma:

$$\boxed{A = P_n\, p^2}$$

Donde P_n es un factor que depende solamente de n.

$$\boxed{P_n = \frac{1}{4\,n\tan\left(\frac{180}{n}\right)}}$$

3) Datos: n y R

Utilizo la fórmula de R hallada en la página 7:

$$R = \frac{l}{2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)} \quad \rightarrow \quad l = 2\,R\,sen\left(\frac{180}{n}\right)$$

$$A = \frac{n\left[2\,R\,sen\left(\frac{180}{n}\right)\right]^2}{4\tan\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{n\,\cancel{4}R^2\,sen^2\left(\frac{180}{n}\right)}{\cancel{4}\tan\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{n\,R^2\,sen^{\cancel{2}}\left(\frac{180}{n}\right)}{\frac{\cancel{sen\left(\frac{180}{n}\right)}}{\cos\left(\frac{180}{n}\right)}} =$$

$$= n\,R^2\,sen\left(\frac{180}{n}\right)\cos\left(\frac{180}{n}\right)$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$

$$A = n\,R^2\,\frac{sen\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$$

Obsérvese que esta fórmula puede expresarse de la siguiente forma:

$$\boxed{A = R_n\,R^2}$$

Donde R_n es un factor que depende solamente de n.

$$\boxed{R_n = \frac{n}{2}\,sen\left(\frac{360}{n}\right)}$$

No tiene sentido que para cada situación planteada el alumno calcule esos factores (es engorroso, a la larga redundante y hay que calcular funciones trigonométricas).
Así que lo más conveniente es **disponer de ellos en una tabla**:

n	L_n	P_n	R_n
3	0,433	0,0481	1,299
4	1	0,0625	2
5	1,7205	**0,0688**	2,3776
6	2,5981	0,0722	2,5981
7	3,6339	0,0742	2,7364
8	**4,8284**	0,0754	2,8284
9	6,1818	0,0763	2,8925
10	7,6942	0,0769	2,9389
11	9,3656	0,0774	**2,9735**
12	11,1962	0,0778	3

Ahora estamos en condiciones de resolver el ejercicio planteado anteriormente:
Calcular el área de un pentágono cuyo perímetro es 100 cm y su apotema es 10 cm.

Ya se comprobó que el dato de la apotema está mal, pero no importa ya que ahora ni siquiera la necesitamos.

$$A = P_5\, p^2 = 0,0688\ (100)^2 = 688\, cm^2$$

Otros ejemplos:

Calcular el área de un octógono (n = 8) cuyo lado mide 6,5 cm.

$$A = L_8\, l^2 = 4,8284\ (6,5)^2 = 204\, cm^2$$

Calcular el área de un polígono regular de 11 lados sabiendo que el radio de su circunferencia circunscripta es 15 m.

$$A = R_{11}\, R^2 = 2,9735\ (15)^2 = 669\, m^2$$