

MATRICES
Y
DETERMINANTES

Conceptos Básicos
Teórico y Prácticos

Escrito por:

Prof. Arturo Rodrigo Farinha

Índice

MATRICES

Noción de Matriz	3
Definición	3
Casos particulares	3
Igualdad de matrices	4
Suma de matrices	5
Resta de matrices	5
Multiplicación de matrices	6
Multiplicación de un número por una matriz	7
Matriz Inversa	8
División de matrices	10
Matriz Traspuesta	11
Práctico	12
Soluciones	13

DETERMINANTES

Noción de Determinante	15
Definición	15
Determinante de una matriz de 1x1	15
Determinante de una matriz de 2x2	15
Determinante de una matriz de 3x3 (Regla de Sarrus)	16
Algunas propiedades de los determinantes	17
Cálculo de la matriz inversa	21
Práctico	24
Soluciones	25

Fuentes de información	26
------------------------------	----

[MATRICES]

Noción de Matriz

Matriz de $m \times n$: es un conjunto de elementos ordenados en una tabla de **m filas** (horizontales) y **n columnas** (verticales).

En esta publicación veremos solamente matrices en las que sus elementos son números reales.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 3 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{fila 1} \\ \rightarrow \text{fila 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{col 1} & \text{col 2} & \text{col 3} \end{array}$$

A es una matriz de 2×3 (2 filas y 3 columnas), pudiéndose indicar sus dimensiones así: $A_{2 \times 3}$

Definición

Designaremos con N_m y N_n a los conjuntos de los primeros m naturales positivos y primeros n naturales positivos respectivamente. Llamaremos matriz $M(m,n)$ a las matrices con coeficientes reales.

Definición: $M(m,n): N_m \times N_n \rightarrow R$

(La matriz real de m filas y n columnas es una función cuyo dominio es el conjunto de todas las parejas (i,j) , donde $1 \leq i \leq m, i \in N$ y $1 \leq j \leq n, j \in N$, y cuyo codominio es el conjunto de los números reales.)

Casos Particulares

➤ *Matriz Fila:* tiene una sola fila.

$$[2 \quad -5 \quad 6 \quad 9] \quad (1 \times 4)$$

➤ *Matriz Columna:* tiene una sola columna.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

➤ *Matriz Rectangular:* tiene diferente cantidad de filas y columnas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -6 \\ 4 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad [7 \quad 2]$$

➤ *Matriz Cuadrada*: tiene la misma cantidad de filas y columnas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 9 & -2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 14 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se llama diagonal principal a la conformada por los números que van de la esquina superior izquierda a la inferior derecha de una matriz cuadrada.

En la matriz de 2x2: 1 5
 En la matriz de 3x3: 6 3 1

➤ *Matriz Triangular*: matriz **cuadrada** en la que todos sus elementos que están “por encima” (matriz triangular inferior) o “por debajo” (matriz triangular superior) de la diagonal principal son 0s.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz triangular inferior matriz triangular superior

➤ *Matriz Diagonal*: matriz **cuadrada** en la que todos sus elementos fuera de la diagonal principal son 0s.

$$\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Observación: toda matriz diagonal es simultáneamente una matriz triangular inferior y superior.

➤ *Matriz Identidad*: matriz **diagonal** formada por 1s en su diagonal principal. Se simboliza **I**.

$$I_{1x1} = [1] \quad I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ *Matriz Nula*: matriz formada completamente por 0s. Se simboliza **O**.

$$O_{1x1} = [0] \quad O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{4x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{3x4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen las mismas dimensiones y los elementos que ocupan los mismos lugares son iguales.

Suma de matrices

Las matrices involucradas deben tener **las mismas dimensiones**.
Se suman los elementos posición a posición.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 & 8+6 & -4+8 \\ -3+2 & 1-7 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 4 \\ -1 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la Suma de matrices:

Sean A, B, C y **O** matrices de iguales dimensiones:

Neutro de la Suma: es la matriz Nula (**O**).

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz nula de } 2 \times 3 \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz nula de } 3 \times 1$$

Para todo A se cumple: $A + O = O + A = A$

Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

Conmutativa: $A + B = B + A$

Existencia del Opuesto: Para toda matriz A existe una única matriz opuesta de A que se anotará $-A$ que cumple: $A + (-A) = (-A) + A = O$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{La matriz opuesta de A es: } -A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 6 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Verificar que $A + (-A) = O$

Resta de matrices

Las matrices involucradas deben tener **las mismas dimensiones**.
Restar dos matrices, es sumar a la primera la opuesta de la segunda.

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 15 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 20 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 15 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -20 & 7 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-5 & 2+3 & 15+2 \\ 8-20 & -6+7 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 17 \\ -12 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Se pueden multiplicar dos matrices solamente si estas son **conformables** (el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, es decir que A es de $m \times n$ y B es de $n \times p$).

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Para obtener el elemento ubicado en la fila **i** y columna **j** de la matriz resultado, se multiplican elemento a elemento los de la fila **i** de la primera matriz con los de la columna **j** de la segunda matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 11 & -5 & (11)(1) + (-5)(0) & (11)(-2) + (-5)(7) & (11)(5) + (-5)(-6) & (11)(-3) + (-5)(5) \\ 0 & -2 & (0)(1) + (-2)(0) & (0)(-2) + (-2)(7) & (0)(5) + (-2)(-6) & (0)(-3) + (-2)(5) \\ 3 & 1 & (3)(1) + (1)(0) & (3)(-2) + (1)(7) & (3)(5) + (1)(-6) & (3)(-3) + (1)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -57 & 85 & -58 \\ 0 & -14 & 12 & -10 \\ 3 & 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

Observar en el ejemplo que A es de 3×2 y B es de 2×4 , por lo que $A \times B$ es de 3×4 :

$$\begin{matrix} A & & B & & & & A \times B \\ (3 & \times & 2) \times (2 & \times & 4) & \Rightarrow & (3 \times 4) \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & & \\ & & A \text{ y B son conformables} & & & & \end{matrix}$$

Propiedades de la Multiplicación de matrices:

Sean A, B y C matrices conformables.

Neutro de la Multiplicación: para las **matrices cuadradas**, es la matriz Identidad (I).

Sea A cuadrada: $A \times I = I \times A = A$

Asociativa:

Sean $A_{m \times n}$ $B_{n \times p}$ $C_{p \times q}$ (A conformable con B, y B conformable con C)

Se cumple que: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$

Distributiva respecto a la suma:

Sean $A_{m \times n}$ $B_{n \times p}$ $C_{n \times p}$ (A conformable con B y con C)

Se cumple que: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Observación: El producto de números es conmutativo ($5 \times 6 = 6 \times 5$), pero generalmente EL PRODUCTO DE MATRICES **NO ES CONMUTATIVO**. Esto significa que *no siempre* se cumple que $A \times B = B \times A$

Ejercicio: Escriba dos matrices $A_{3 \times 2}$ y $B_{2 \times 4}$ y multiplíquelas: $A \times B$ y $B \times A$ ¿ $A \times B = B \times A$?

Ejercicio: Escriba otras dos matrices A y B de 2×2 y multiplíquelas: $A \times B$ y $B \times A$ ¿ $A \times B = B \times A$?

Multiplicación de un número por una matriz

Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$6A = 6 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \times 3 & 6 \times (-1) & 6 \times (-4) \\ 6 \times 5 & 6 \times 0 & 6 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -6 & -24 \\ 30 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

$$-2A = (-2) \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \times 3 & (-2) \times (-1) & (-2) \times (-4) \\ (-2) \times 5 & (-2) \times 0 & (-2) \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -10 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la Multiplicación de un número por una matriz:

Sean A y B matrices de iguales dimensiones.

Sean λ y γ números reales.

Se cumple que:

$$\lambda(\gamma A) = (\lambda\gamma)A$$

$$(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$1.A = A$$

$$0.A = O \quad (0 \text{ es el número cero y } O \text{ es la matriz nula de iguales dimensiones que } A)$$

$$\lambda.O = O \quad (O \text{ es una matriz nula})$$

Matriz Inversa

Se sabe de cursos anteriores que el número inverso a^{-1} de un número real a ($a \neq 0$) es aquel que cumple:

$$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1 \quad (1 \text{ es el neutro de la multiplicación de números reales})$$

En forma similar, la matriz inversa A^{-1} de una matriz A (**A debe ser cuadrada** y debe cumplirse que $\boxed{\det(A) \neq 0}$, donde “det” significa determinante, el cual se verá más adelante), es aquella matriz que cumple:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \quad (I \text{ es la matriz identidad: el neutro de la multiplicación de matrices})$$

Si dicha matriz inversa existe ($\det(A) \neq 0$), es única y se dice que A es *invertible*.

Propiedades de la matriz inversa:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$\text{Demostración: } \left. \begin{array}{l} (A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = I \\ A^{-1} \cdot A = I \end{array} \right\} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$\text{Demostración: } \left. \begin{array}{l} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = (A \cdot I) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I \\ (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ejercicios:

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcular AxB y BxA . ¿Qué se puede concluir?

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calcular AxB y BxA . ¿Qué se puede concluir?

Cómo calcular la matriz inversa de una matriz de 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (\text{si } ad - bc \neq 0)$$

Si $ad - bc = 0$, A no tiene matriz inversa.

Ejemplo:

multiplicación de un número por una matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-2)(4) - (10)(-3)} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{22} & \frac{-10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{-2}{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{3}{22} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{2 \times 2}$

Cómo calcular la matriz inversa de una matriz de 3x3

Se necesita saber hallar determinantes.
Así que esto se verá en Determinantes (pág. 20 y 22).

División de matrices

Solamente se pueden dividir **matrices cuadradas con iguales dimensiones**: $A_{n \times n}$ y $B_{n \times n}$

Se sabe de cursos anteriores que dividir dos números reales es multiplicar el primero por el inverso del segundo (siendo el segundo distinto de 0) y que, debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación de números reales, el resultado es el mismo si se realiza dicha multiplicación al revés:

$$\frac{5}{3} = 5 \cdot (3)^{-1} = (3)^{-1} \cdot 5$$

$$\frac{2}{9} = 2 \cdot (9)^{-1} = (9)^{-1} \cdot 2$$

La división de matrices es similar, con la salvedad de que, como la multiplicación de matrices no es conmutativa (ver *Propiedades de la Multiplicación de matrices*), hay 2 formas de realizar la división: multiplicando la matriz del numerador por la matriz inversa del denominador y multiplicando la matriz inversa del denominador por la matriz del numerador.

$$\frac{A}{B} = A \times B^{-1}$$

$$\frac{A}{B} = B^{-1} \times A$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para hallar $\frac{A}{B}$ necesitamos conocer B^{-1} ...

En el ejercicio 1 de la pág. 7 se comprobó que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Una forma de dividir A entre B:

$$\frac{A}{B} = A \times B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -8 & -18 \\ 11 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

La otra forma de dividir A entre B:

$$\frac{A}{B} = B^{-1} \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 5 & -1 & -4 \\ -21 & -1 & 19 \end{bmatrix}$$

Observación: Recuérdese que hay matrices cuadradas que no tienen inversa (porque su determinante vale 0). Esto significa que la división entre matrices no es siempre posible, ya que **depende si la matriz que está en el denominador es invertible**.

Matriz Traspuesta

Dada una matriz A , se llama *traspuesta de A* , y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas (cambiar columnas por filas también produce ese resultado).

Si A es de $m \times n$, A^t es de $n \times m$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A es de 2×3 , A^t es de 3×2 .

Si A es cuadrada, su matriz traspuesta puede obtenerse aplicando una “simetría” de sus elementos respecto de la diagonal principal (esto produce el mismo resultado que cambiar sus filas por columnas).

Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz traspuesta:

- 1) $I^t = I$
- 2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
- 3) $(k.A)^t = k.A^t$
- 4) $(A.B)^t = B^t.A^t$
- 5) $(A^t)^t = A$
- 6) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (A debe ser cuadrada e invertible)

Demostración:

Por definición de matriz inversa: $A.A^{-1} = I$

Tomando traspuestas: $(A.A^{-1})^t = I^t$

Por las propiedades 1 y 4: $(A^{-1})^t.A^t = I$

Por definición de matriz inversa: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Práctico de MATRICES

Ejercicio 1: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
 Determinar: $A+B$ $A+C$ $A-B$ $A+B+C$ $C-A$ $B-C-A$

Ejercicio 2: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

- Hallar una matriz D que verifique $A+D=B$
- Hallar una matriz E que verifique que $C+E$ es diagonal.
- Comprobar que $A+(B-C)=(A+B)-C$

Ejercicio 3: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Realizar la única suma, las 2 sustracciones y los 4 productos posibles entre estas matrices.

Ejercicio 4: $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$
 Calcular: $3A+2B$ $4A+2C-3B$ A^2 $2AB$ $(A+B)^2$ $A^2+2AB+B^2$
 (Tener en cuenta que $M^2 = M \cdot M$)

Ejercicio 5: Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Establecer qué productos están definidos y calcularlos.

Ejercicio 6:

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 11 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

Determinar cuáles de los siguientes productos están definidos y, en caso de estarlo, efectuar la operación.

A.B B.A A.C C.A A.D D.A B.C C.B B.D D.B C.D D.C

Ejercicio 7: Calcular las matrices inversas de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ y de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Hallar la matriz inversa de A.B sin calcularla directamente. *Sugerencia: usar una propiedad*

Ejercicio 8: Sean las matrices del ejercicio 4. Hallar:

- $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{A}$ (cualquiera de las dos formas de dividir)
- A^t y B^t . Verificar que $(A.B)^t = B^t.A^t$

Soluciones del Práctico de Matrices

1)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 7 \\ -8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+B+C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ -11 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C-A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B-C-A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2)

$$a) D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) E = \begin{bmatrix} a & -1 & 5 \\ -5 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{bmatrix}$$

3)

$$C+D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C-D = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D-C = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BxA = [2]$$

$$Cx A = \begin{bmatrix} 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$DxA = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

4)

$$3A+2B = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$4A+2C-3B = \begin{bmatrix} -26 & -4 \\ -11 & -15 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2AB = \begin{bmatrix} -30 & 2 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} -14 & 24 \\ -40 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} -13 & 21 \\ -43 & 33 \end{bmatrix}$$

5)

$$Ax B = \begin{bmatrix} -27 & 7 & -18 & 9 \\ 0 & 8 & 12 & 48 \end{bmatrix}$$

$$Cx A = \begin{bmatrix} -33 & 54 \\ 3 & 14 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$Cx B = \begin{bmatrix} 99 & 5 & 112 & 151 \\ -9 & 9 & 4 & 43 \\ 0 & 6 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

6)

$$Cx A = \begin{bmatrix} -33 & 54 \\ 3 & 14 \\ 0 & 12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax D = \begin{bmatrix} -13 & 8 & -4 & 13 \\ 4 & 16 & 28 & 44 \end{bmatrix}$$

$$BxC = \begin{bmatrix} 58 & 58 \\ 18 & 45 \\ -24 & 19 \end{bmatrix}$$

$$Cx D = \begin{bmatrix} 63 & 32 & 122 & 121 \\ -1 & 16 & 22 & 41 \\ 3 & 12 & 21 & 33 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$DxC = \begin{bmatrix} 58 & 58 \\ 18 & 45 \end{bmatrix}$$

7)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} & \frac{2}{13} \\ \frac{7}{26} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$(A.B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{4}{65} \\ -\frac{1}{13} & \frac{7}{65} \end{bmatrix}$$

8)

a)

$$\frac{A}{B} = Ax B^{-1} = \begin{bmatrix} -0,52941 & 0,29412 \\ -0,41176 & 0,11765 \end{bmatrix}$$

$$\frac{C}{A} = Cx A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$A^t = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

| DETERMINANTES |

Noción de Determinante

Un determinante es un **número** que resulta de hacer ciertas cuentas con los elementos de una **matriz cuadrada**.

Se simboliza: $\det(A)$ siendo A la matriz de la cual se calcula el determinante.

Otra forma de simbolizar al determinante es escribiendo el nombre o el contenido de la matriz entre líneas verticales.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{es un número (el determinante de la matriz A)}$$

Definición

$$\det(A): M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\det(A)$ es una función cuyo dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y cuyo codominio es el conjunto de los números reales.

Determinante de una matriz de 1x1

El determinante de una matriz de 1x1 es el elemento de dicha matriz.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplos: } & A = [2] & \det(A) &= 2 \\ & B = [-5] & \det(B) &= -5 \end{aligned}$$

Determinante de una matriz de 2x2

Dada una matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, su determinante se calcula de la siguiente forma:

$$\det(A) = ad - bc$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A) = (3)(1) - (-5)(9) = 3 - (-45) = 3 + 45 = 48$$

Determinante de una matriz de 3x3 (Regla de Sarrus)

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Para hallar el determinante de una matriz de 3x3, se aplica la *Regla de Sarrus*, la cual consiste en:

1. Agregar a la derecha de la matriz sus 2 primeras columnas:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

2. Multiplicar según las flechas, poniendo el signo contrario en los 3 números de la izquierda:

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow$
 $\quad 40 \quad 0 \quad -6 \quad \quad 8 \quad -15 \quad 0$
} se escribieron con signo contrario

3. Sumar los 6 números obtenidos:

$$40 + 0 - 6 + 8 - 15 + 0 = 27$$

Así que: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 27$

Algunas propiedades de los determinantes

1. Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales, su determinante vale 0.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \leftarrow \text{la primera y tercera fila son iguales}$$

$$\det(A) = 0$$

2. Si se multiplica por un número todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por dicho número.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 2(-3) \\ -1 & 2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{se multiplicó la segunda columna por 2})$$

$$\det(A) = 17$$

$$\det(B) = 34 \quad \Rightarrow \text{efectivamente } \det(B) = 2 \cdot \det(A)$$

3. Si en una matriz cuadrada se cambian las filas por las columnas en forma ordenada, su determinante no cambia.

Recordando que al cambiar las filas por las columnas de una matriz en forma ordenada se obtiene su *matriz traspuesta* (pág. 10), se puede expresar esta propiedad de la siguiente forma: $\det(A^t) = \det(A)$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinante de esa matriz:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Determinante de la matriz resultante de cambiar las filas por las columnas (matriz traspuesta):

$$\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

4. Si se intercambian entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante pasa a ser el valor opuesto.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 8 & -8 & 6 \\ 2 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & -8 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{se cambiaron de lugar las columnas 2 y 3}$$

$\det(A) = 582$
 $\det(B) = -582$

5. Si en una matriz cuadrada una fila es proporcional a otra fila, o una columna es proporcional a otra columna, su determinante vale 0.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{las filas 1 y 3 son proporcionales (la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por 2)}$$

$\det(A) = 0$

6. Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna compuesta completamente por 0s, su determinante vale 0.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{la segunda columna está compuesta completamente por ceros}$$

$\det(A) = 0$

Nota: Que una matriz tenga una de sus dos diagonales compuesta completamente por 0s, **no** implica necesariamente que su determinante valga 0.

7. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de esas matrices.

Es decir que: $\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -11 \\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -23 \end{array} \right\} \rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = (-11) \cdot (-23) = 253$$

$$A.B = \begin{bmatrix} -2 & -15 & 16 \\ -4 & -7 & 9 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A.B) = 253$$

Nota: Se puede comprobar en el ejemplo que **no es cierto** que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

$$\left. \begin{array}{l} A+B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A+B) = 3 \\ \det(A) + \det(B) = (-11) + (-23) = -34 \end{array} \right\} \rightarrow \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

8. El determinante de la matriz identidad es 1.

Es decir que: $\det(I) = 1$

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ etc.

9. El determinante de una matriz cuadrada de $n \times n$ multiplicada por un número es igual al determinante de la matriz multiplicado por el número elevado a la n .

Es decir que: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ siendo $A_{n \times n}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -3$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 5 \\ 15 & -5 & 10 \\ -20 & 0 & -15 \end{bmatrix} \rightarrow \det(5A) = -375$$

$$(5)^3 \det(A) = (125)(-3) = -375$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \det(-2A) = 24$$

$$(-2)^3 \det(A) = (-8)(-3) = 24$$

10. El determinante de la matriz inversa de una matriz es igual al inverso del determinante de la matriz.

Es decir que: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Nota: Esto se cumple si existe A^{-1} , o sea si $\det(A) \neq 0$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -2 \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$$

Demostración:

A^{-1} cumple (por ser matriz inversa de A):

$$A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow \det(A^{-1} \cdot A) = \det(I)$$

Por la propiedad 7:

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$$

Por la propiedad 8:

$$\det(I) = 1$$

Entonces:

$$\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Cálculo de la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{Adj^t}{\det(A)}$$

A debe ser una matriz cuadrada tal que su determinante sea distinto de 0 (pág. 7).

Adj es la matriz *adjunta* de A.

Adj^t es la matriz *traspuesta* de Adj (pág. 10).

Cada elemento Adj_{ij} de la matriz Adj se halla de la siguiente forma:

$$Adj_{ij} = \begin{cases} |M_{ij}| & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -|M_{ij}| & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Adj_{ij} es el elemento de la matriz Adj ubicado en la fila i y la columna j .

M_{ij} es la matriz *menor del elemento* a_{ij} , resultante de suprimir la fila i y la columna j de la matriz A.

$|M_{ij}|$ es el determinante de M_{ij} .

Cómo calcular la matriz inversa

1. Hallar $\det(A)$: el determinante de A $\begin{cases} \text{Si es } 0 & \Rightarrow \text{No existe la matriz inversa} \\ \text{Si no es } 0 & \Rightarrow \text{Continuar} \end{cases}$
2. Hallar Adj : la matriz adjunta de A (se calculan cada uno de sus elementos Adj_{ij})
3. Formar Adj^t : la matriz traspuesta de Adj
4. Multiplicar el número $\frac{1}{\det(A)}$ por la matriz Adj^t

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 3$ es distinto de 0, así que podemos continuar

$$Adj = \begin{bmatrix} Adj_{11} & Adj_{12} & Adj_{13} \\ Adj_{21} & Adj_{22} & Adj_{23} \\ Adj_{31} & Adj_{32} & Adj_{33} \end{bmatrix}$$

Para comprender cómo se determina una matriz M_{ij} , se detalla la forma de construir M_{11} y M_{12} :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Adj_{11} = |M_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

(1+1 es par)

$$Adj_{12} = -|M_{12}| = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(2) = -2$$

(1+2 es impar)

$$Adj_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

(1+3 es par)

$$Adj_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(3) = -3$$

(2+1 es impar)

$$Adj_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

(2+2 es par)

$$Adj_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

(2+3 es impar)

$$Adj_{31} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

(3+1 es par)

$$Adj_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(5) = -5$$

(3+2 es impar)

$$Adj_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3+3 es par)

$$Adj = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ -6 & -5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Adj^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj^t = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{3} & \frac{-3}{3} & \frac{-6}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_{3 \times 3}$

Forma abreviada de calcular la matriz inversa de una matriz de 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Si $\det(A) = 0$, A no tiene matriz inversa.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando Sarrus para obtener el determinante ($\det(A) = -12$) y realizando las operaciones planteadas, se obtiene:

multiplicación de un número por una matriz (pág. 6)

$$A^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -6 \\ 24 & -12 & 24 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -5 & 1 & -6 \\ 24 & -12 & 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{12}\right)(3) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-3) & \left(-\frac{1}{12}\right)(6) \\ \left(-\frac{1}{12}\right)(-5) & \left(-\frac{1}{12}\right)(1) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-6) \\ \left(-\frac{1}{12}\right)(24) & \left(-\frac{1}{12}\right)(-12) & \left(-\frac{1}{12}\right)(24) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{6}{12} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{6}{12} \\ -\frac{24}{12} & \frac{12}{12} & -\frac{24}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verificar que la matriz inversa obtenida en el ejemplo cumple $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_{3 \times 3}$

Práctico de DETERMINANTES

Ejercicio 1: Calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 10 \\ 4 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2: Mencionar las propiedades utilizadas para obtener las siguientes igualdades (no se permite justificar las igualdades hallando específicamente los determinantes):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & -18 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -27$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} -21 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ -9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i) } \det(I_{14 \times 14}) = 1$$

Ejercicio 3: Hallar las matrices inversas de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -6 & -4 & -6 \\ -3 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ejercicio 4: } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar **a** sabiendo que es negativo y que $\det(A) = 10$

$$\text{Ejercicio 5: } A = \begin{bmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$$

Hallar **a** sabiendo que $\det(A) \times \det(B) = 15a$

Soluciones del Práctico de Determinantes

1)

$$\begin{array}{cccccc} 26 & -18 & 1 & -84 & 25 & \\ 87 & 1 & -5 & 17 & 1 & 333 \end{array}$$

2) A cargo del estudiante/lector

3)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D^{-1} \text{ no existe (det(D)=0)}$$

4) $a = -5$ 5) $a = 0$ $a = -\frac{5}{3}$ $a = 3$

Fuentes de información

- G. A. Duffour, “Geometría Analítica”, Séptima Edición.
- Experiencias personales de aprendizaje y enseñanza de estos temas.