CINEMÁTICA

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Escrito por:

Prof. Arturo Rodrigo Farinha

Índice

INTRODUCCIÓN

Con esta monografía no pretendo “descubrir la rueda”. Todas las conclusiones y fórmulas a las que llego hace mucho tiempo que fueron descubiertas y seguramente deben de figurar, con mayor o menor detalle, en los libros de Física que tratan el tema Cinemática.
Lo que pretendo es simplemente reunir en un solo documento información y fórmulas que usualmente se encuentran dispersas, incompletas o sin demostrar en libros, es decir documentar de una forma exhaustiva y lo más detallada posible todo lo necesario para obtener dichas fórmulas y además para tener una visión holística del tema. Espero que sea de utilidad.

Observaciones:

- Se examinan solo trayectorias en un plano y suficientemente cortas para que la fuerza gravitacional se pueda considerar constante en magnitud y dirección. Tampoco se tienen en cuenta los efectos de la resistencia del aire.

- Para seguir el desarrollo físico-matemático que se propone a continuación, se asume que el lector conoce lo siguiente: la segunda ley de Newton, descomposición de vectores, integrar, derivar, operatoria algebraica, resolución de una ecuación de segundo grado, nociones básicas de trigonometría, Teorema de Pitágoras, sistema cartesiano de coordenadas, función parabólica y elíptica.

- Los que solamente quieran saber “el final de la historia” pueden saltearse los desarrollos algebraicos y utilizar directamente las fórmulas finales. En cada una está dicho claramente qué calcula y qué es cada parámetro que aparece en la misma. Para aquellos que tengan la base matemática requerida y la curiosidad de ver “cómo se llegó”, planteo los desarrollos matemáticos en forma rigurosa y detallada.

- Todo el desarrollo lo hice por mi cuenta, con excepción de la Parábola de Seguridad y el Lugar Geométrico de los Puntos de Altura Máxima, lo cual descubrí en Internet.

En esta monografía comienzo aplicando *la Segunda Ley de Newton* en las direcciones cartesianas horizontal y vertical sobre un objeto únicamente influenciado por la atracción gravitatoria (por ejemplo de nuestro planeta) y que tiene cierta velocidad inicial. A partir de esto se obtienen *dos ecuaciones diferenciales* muy sencillas (las cuales sorprendentemente no dependen de la masa del objeto). Y a partir de estas ecuaciones obtengo *varias fórmulas que describen en forma precisa el comportamiento del objeto*.
Luego abordo en detalle el clásico *Problema Balístico* y finalmente presento dos curvas destacadas: la *Parábola de Seguridad* y el *Lugar Geométrico de los Puntos de Altura Máxima*.

Situación:

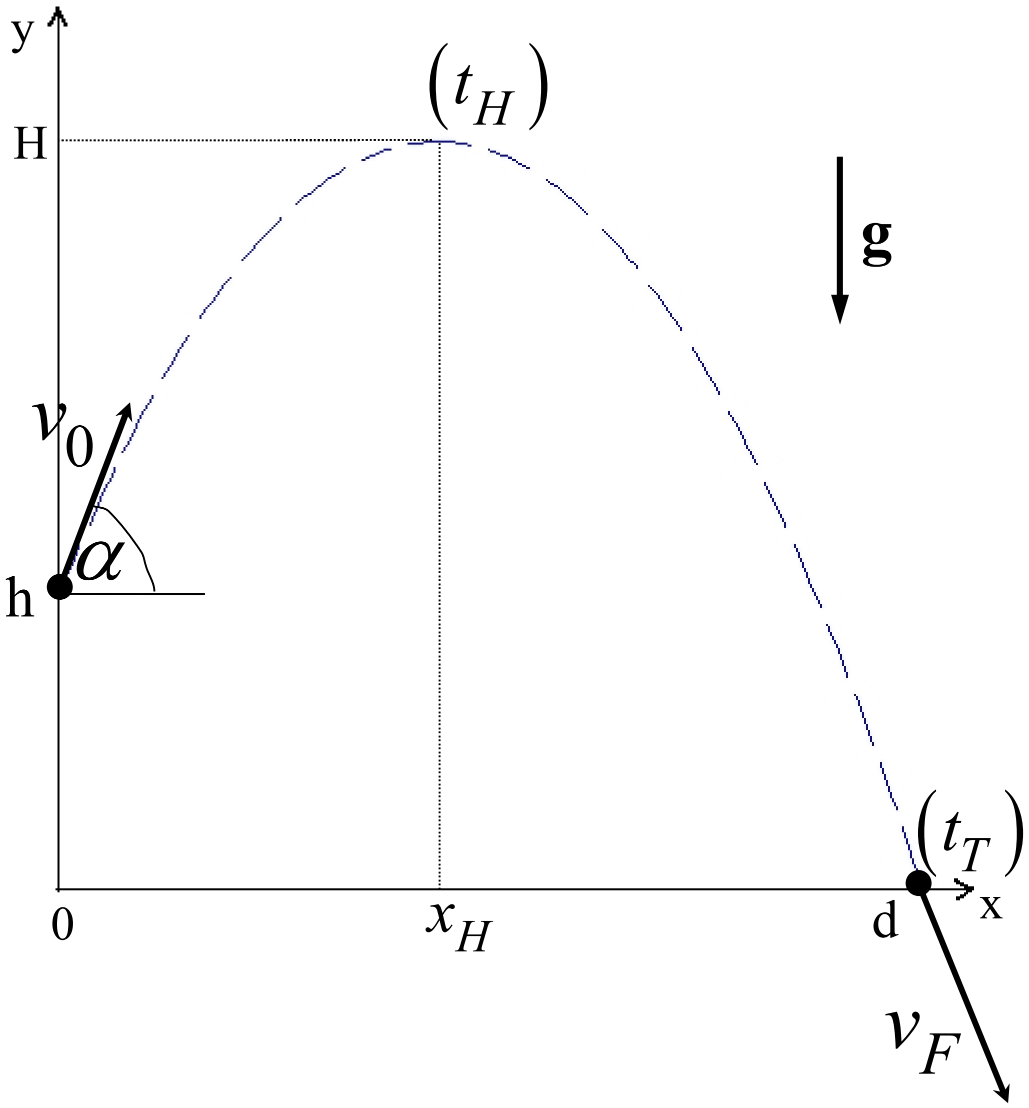
Se lanza un objeto de masa m desde una altura h con una velocidad v_0 *orientada un ángulo* α.

Condiciones iniciales (datos)

m	*masa del proyectil*		$m > 0$
g	*aceleración gravitatoria*	(*en la Tierra vale* $9.8\ m/s^2$)	
x_0	*posición horizontal inicial del proyectil*	$x_0 = 0$	
y_0	*posición vertical inicial del proyectil*	$y_0 = h$	$h \geq 0$
v_0	*velocidad inicial del proyectil*		$v_0 \geq 0$
α	*ángulo del lanzamiento del proyectil respecto al eje x*		$-90º \leq \alpha \leq 90º$

Qué quiero hallar

y(x)	fórmula que describa la trayectoria del proyectil
H	altura máxima alcanzada por el proyectil
x_H	a qué distancia del lanzamiento se alcanza la altura máxima
t_H	tiempo que demora el proyectil en alcanzar la altura máxima
d	a qué distancia del lanzamiento el proyectil llega al suelo
t_T	tiempo total que demora el proyectil en llegar al suelo (tiempo total de vuelo)
v_F	velocidad del proyectil al llegar al suelo


y
H
(t_H)
g
v_0
α
h
(t_T)
0
x_H
d
x
v_F

Fórmula de y(x)

Segunda Ley de Newton: $$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (1)$$

(m es la masa del proyectil, $\vec{a}$ es su vector aceleración y $\vec{F}$ es la fuerza total que se le aplica)

Descompongo la ecuación vectorial (1) según x: $m\,a_x = F_x$ (2)

Horizontalmente no hay fuerzas aplicadas sobre el objeto: $F_x = 0$

Sustituyo en (2): $$m\,a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad a_x = 0 \qquad (3)$$

Descompongo la ecuación vectorial (1) según y: $m\,a_y = F_y$ (4)

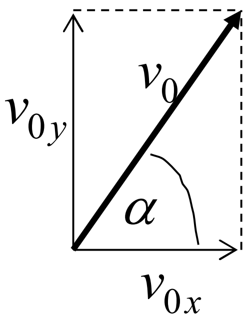
Verticalmente hay una fuerza aplicada sobre el objeto (su peso): $F_y = -mg$
(el signo negativo se debe a que el peso es hacia abajo y es considerado como sentido positivo el del vector $\vec{y}$, cuyo sentido es hacia arriba)

Sustituyo en (4): $$\cancel{m}\,a_y = -\cancel{m}\,g \quad \Rightarrow \quad a_y = -g \qquad (5)$$

Integro respecto a t las aceleraciones (3) y (5) para obtener las velocidades según x e y, y finalmente la posición en x y la posición en y (téngase en cuenta que x e y son funciones del tiempo t):

$$a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_{0x} \quad \Rightarrow \quad x = v_{0x}\,t + x_0$$

$$a_y = -g \quad \Rightarrow \quad v_y = -gt + v_{0y} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}\,t + y_0 \qquad (6)$$



Aplico Trigonometría:
$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0\, sen\,\alpha$$

Y recordando que en las condiciones iniciales se impuso que $x_0 = 0 \;\; y \;\; y_0 = h$, las velocidades y posiciones de (6) pueden expresarse así:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \qquad (7) \\ v_y &= -gt + v_0\, sen\,\alpha \qquad (8) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)\,t \qquad (9) \\ y &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0\, sen\,\alpha)\,t + h \qquad (10) \end{aligned}}$$

Despejo t en (9): $$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad (11)$$

Sustituyo t en (10):

$$y(x) = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + \cancel{v_0}\, sen\,\alpha \left(\frac{x}{\cancel{v_0}\cos\alpha}\right) + h = -\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha} + \left(\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\right)x + h$$

$$\boxed{y(x) = \left(-\frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x^2 + \left(\tan\alpha\right)x + h} \qquad (12)$$

Así que ***la trayectoria del objeto será parabólica con concavidad negativa*** (es decir que el objeto finalmente caerá al suelo).
Obsérvese que esta fórmula es válida solo si $\boxed{v_0 \neq 0 \quad y \quad \alpha \neq \pm 90º}$ (de no cumplirse esto, habría una división entre 0). De hecho estas restricciones surgieron al utilizar la fórmula (11).
Si $v_0 = 0 \quad o \quad \alpha = \pm 90º$, la trayectoria es vertical y la fórmula (12) no sirve, debiéndose utilizar exclusivamente las fórmulas (9) y (10). Esto lo abordo en forma detallada más adelante, en Situaciones Especiales 2 y 3.

Fórmula de x_H

Para hallar a qué distancia del lanzamiento se alcanza la altura máxima , derivo (12) respecto a x e igualo a 0:

$$y'(x) = \left(-\frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)2x + \tan\alpha$$

$$\left(-\frac{g}{\cancel{2}\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)\cancel{2}x_H + \tan\alpha = 0$$

$$\cancel{-}\frac{g}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}x_H = \cancel{-}\tan\alpha$$

$$\frac{g}{v_0^{\,2}\cos^{\cancel{2}}\alpha}x_H = \frac{sen\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$$

$$x_H = \frac{v_0^{\,2}\,sen\,\alpha\,\cos\alpha}{g}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble:
$sen(2\alpha) = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{x_H = \frac{v_0^{\,2}\,sen(2\alpha)}{2g}} \qquad (13)$$

Fórmula de H

Para hallar la altura máxima a la que llega el proyectil, evalúo (12) en x_H :

$$H = y(x_H) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x_H^2 + (\tan \alpha) x_H + h$$

$$H = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \left(\frac{v_0^2 \, sen(2\alpha)}{2g} \right)^2 + (\tan \alpha) \left(\frac{v_0^2 \, sen(2\alpha)}{2g} \right) + h$$

$$H = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \left(\frac{v_0^2 \, \cancel{2} sen\, \alpha \cos \alpha}{\cancel{2} g} \right)^2 + \left(\frac{sen\, \alpha}{\cancel{\cos \alpha}} \right) \left(\frac{v_0^2 \, \cancel{2} sen\, \alpha \, \cancel{\cos \alpha}}{\cancel{2} g} \right) + h$$

$$H = \left(-\frac{\cancel{g}}{2 \cancel{v_0^2} \, \cancel{\cos^2 \alpha}} \right) \left(\frac{v_0^{\cancel{4}\,2} \, sen^2 \alpha \, \cancel{\cos^2 \alpha}}{g^{\cancel{2}}} \right) + \frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{g} + h$$

$$H = -\frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{g} + h$$

$$H = \frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{g} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + h$$

$$H = \frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{g} \left(\frac{1}{2} \right) + h$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \, sen^2 \alpha}{2g} + h} \qquad (14)$$

¿H máxima?

Cabe preguntarse: *dado v_0, ¿cuál es el ángulo de lanzamiento para el cual se logra que la altura a la que llega el proyectil es la máxima posible, es decir que se maximiza el valor de H?*

Para eso hay que derivar H respecto a α e igualar a 0
(Se suele analizar esto suponiendo que el lanzamiento es desde el suelo, es decir h = 0)

$$H(\alpha) = \frac{v_0^{\ 2}\, sen^2\, \alpha}{2g}$$

$$H'(\alpha) = \frac{v_0^{\ 2}\, 2\, sen\,\alpha \cos\alpha}{2g}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha) = 2\, sen\,\alpha \cos\alpha$

$$H'(\alpha) = \frac{v_0^{\ 2}\, sen(2\alpha)}{2g}$$

$$H'(\alpha) = 0 \iff sen(2\alpha) = 0 \iff 2\alpha = 0^{\circ} \ \ o \ \ 2\alpha = 180^{\circ} \iff \alpha = 0^{\circ} \ \ o \ \ \alpha = 90^{\circ}$$

Evalúo H en esos ángulos:

$$H(0) = \frac{v_0^{\ 2}\, sen^2\, 0}{2g} = \frac{v_0^{\ 2}\, 0}{2g} = 0$$

$$H(90) = \frac{v_0^{\ 2}\, sen^2\, 90}{2g} = \frac{v_0^{\ 2}\, 1^2}{2g} = \frac{v_0^{\ 2}}{2g} > 0$$

Así que se concluye: $\boxed{\alpha_{Máx} = 90^{\circ} \qquad H_{Máx} = \frac{v_0^{\ 2}}{2g}}$ (tirando desde el suelo) (15)

Fórmula de t_H

Hallo t_H utilizando (11): $t_H = \dfrac{x_H}{v_0 \cos\alpha}$

Aplico (13):

$$t_H = \frac{\dfrac{v_0^{\ 2}\, sen(2\alpha)}{2g}}{v_0 \cos\alpha}$$

$$t_H = \frac{v_0^{\cancel{2}}\, \cancel{2}\, sen\,\alpha\, \cancel{\cos\alpha}}{\cancel{2}g\, \cancel{v_0}\, \cancel{\cos\alpha}} \qquad \boxed{t_H = \frac{v_0\, sen\,\alpha}{g}} \quad (16)$$

Fórmula de d

El valor de x donde cae el objeto (llamado d) será una de las raíces del polinomio de 2º grado (12)
Se resuelve aplicando la conocida fórmula de resolución de una ecuación de 2º grado:

$$y(x)=\left(-\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x+h$$

$$d=\frac{-\tan\alpha\pm\sqrt{\tan^2\alpha-4\left(-\dfrac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)h}}{\cancel{2}\left(-\dfrac{g}{\cancel{2}\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)}$$

$$d=\frac{-\dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}\pm\sqrt{\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{{}^{2}\cancel{4}g\,h}{\cancel{2}\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}}}{-\dfrac{g}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}}$$

$$d=\frac{-\dfrac{sen\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\pm\dfrac{1}{\cancel{\cos\alpha}}\sqrt{sen^2\alpha+\dfrac{2g\,h}{v_0^{\,2}}}}{-\dfrac{g}{v_0^{\,2}\cos^{\cancel{2}}\alpha}}$$

$$d=\frac{-sen\,\alpha\pm\dfrac{1}{v_0}\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+2g\,h}}{-\dfrac{g}{v_0^{\,2}\cos\alpha}}$$

$$d=\frac{\dfrac{-v_0\,sen\,\alpha\pm\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+2g\,h}}{\cancel{v_0}}}{-\dfrac{g}{v_0^{\,\cancel{2}}\cos\alpha}}$$

$$d=\left(-\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(-v_0\,sen\,\alpha\pm\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+2g\,h}\right)$$

$$d=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\,sen\,\alpha\mp\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+2g\,h}\right)$$

La resta da un valor negativo y la suma un valor positivo, así que en este caso solo sirve la suma:

$$\boxed{d=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\,sen\,\alpha+\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+2g\,h}\right)}\qquad(17)$$

¿d máxima?

Cabe preguntarse: *dado v_0, ¿cuál es el ángulo de lanzamiento para el cual la distancia recorrida por el proyectil es la máxima posible, es decir que se maximiza el valor de d?*

Para eso hay que derivar d respecto a α e igualar a 0
(Se suele analizar esto suponiendo que el lanzamiento es desde el suelo, es decir h = 0)

$$d(\alpha) = \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\, sen\,\alpha + \sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha}\right)$$

$$d(\alpha) = \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\, sen\,\alpha + v_0\, sen\,\alpha\right)$$

$$d(\alpha) = \left(\frac{v_0 \cos\alpha}{g}\right)\left(2 v_0\, sen\,\alpha\right)$$

$$d(\alpha) = \frac{v_0^{\,2}\, 2\, sen\,\alpha \cos\alpha}{g}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha) = 2\, sen\,\alpha \cos\alpha$

$$d(\alpha) = \frac{v_0^{\,2}\, sen(2\alpha)}{g}$$

$$d'(\alpha) = \frac{v_0^{\,2}\, 2\cos(2\alpha)}{g}$$

$$d'(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(2\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\alpha = 90^{\text{o}} \;\Leftrightarrow\; \alpha = 45^{\text{o}}$$

Evalúo d en ese ángulo:

$$d(45) = \frac{v_0^{\,2}\, sen(2*45)}{g} = \frac{v_0^{\,2}\, sen(90)}{g} = \frac{v_0^{\,2} * 1}{g} = \frac{v_0^{\,2}}{g}$$

Así que se concluye: $\boxed{\alpha_{Máx} = 45^{\text{o}} \qquad d_{Máx} = \frac{v_0^{\,2}}{g}}$ (tirando desde el suelo) (18)

Fórmula de t_T

Hallo t_T utilizando (11): $t_T = \dfrac{d}{v_0 \cos\alpha}$

Aplico (17):

$$t_T = \frac{\left(\dfrac{\cancel{v_0 \cos\alpha}}{g}\right)\left(v_0\, sen\,\alpha + \sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h}\right)}{\cancel{v_0 \cos\alpha}}$$

$$\boxed{t_T = \frac{1}{g}\left(v_0\, sen\,\alpha + \sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h}\right)} \qquad (19)$$

Fórmula de v_F

La velocidad de llegada al suelo (v_F) se halla indirectamente calculando sus componentes según x e y; luego se aplica el Teorema de Pitágoras:

$$v_F = \sqrt{{v_{xF}}^2 + {v_{yF}}^2}$$

$$v_F = \sqrt{{v_x}^2(t_T) + {v_y}^2(t_T)} \qquad (20)$$

Utilizo las expresiones de v_x y v_y halladas en (7) y (8) respectivamente:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y(t) = -gt + v_0\, sen\,\alpha$$

Evalúo en t_T :

$$v_x(t_T) = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y(t_T) = -gt_T + v_0\, sen\,\alpha$$

t_T ya fue determinado en (19)
Sustituyo todo en (20):

$$v_F = \sqrt{v_x^{\,2}(t_T) + v_y^{\,2}(t_T)}$$

$$v_F = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(-g t_T + v_0\, sen\,\alpha\right)^2}$$

$$v_F = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(-\cancel{g}\,\frac{1}{\cancel{g}}\left(v_0\, sen\,\alpha + \sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h}\right) + v_0\, sen\,\alpha\right)^2}$$

$$v_F = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(\cancel{-v_0\, sen\,\alpha} - \sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h} + \cancel{v_0\, sen\,\alpha}\right)^2}$$

$$v_F = \sqrt{\left(v_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(-\sqrt{v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h}\right)^2}$$

$$v_F = \sqrt{v_0^{\,2} \cos^2\alpha + v_0^{\,2} sen^2\alpha + 2g\,h}$$

$$v_F = \sqrt{v_0^{\,2}\left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right) + 2g\,h}$$

Utilizo la relación fundamental trigonométrica: $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\boxed{v_F = \sqrt{v_0^{\,2} + 2g\,h}} \qquad (21)$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se dispara un proyectil desde una altura de 2 m con una velocidad de 15 m/s y ángulo 60º.

Datos: $v_0 = 15\, m/s \quad \alpha = 60º \quad h = 2\, m$

Trayectoria: aplico (12)

$$y(x) = \left(-\frac{9.8}{2\,(15^2)\cos^2 60} \right) x^2 + \left(\tan 60 \right) x + 2 = -0.08711x^2 + 1.73205x + 2$$

En qué x alcanza altura máxima: aplico (13)

$$x_H = \frac{15^{\,2}\, sen\,(2(60))}{2(9.8)} = 9.94\, m$$

Altura máxima: aplico (14)

$$H = \frac{15^2\, sen^2\, 60}{2(9.8)} + 2 = 10.61\, m$$

Tiempo para alcanzar altura máxima: aplico (16)

$$t_H = \frac{15\, sen\, 60}{9.8} = 1.33\ seg$$

Distancia recorrida: aplico (17)

$$d = \left(\frac{15 \cos 60}{9.8} \right) \left(15\, sen\, 60 + \sqrt{15^2\, sen^2\, 60 + 2(9.8)(2)} \right) = 20.98\, m$$

Tiempo de vuelo: aplico (19)

$$t_T = \frac{1}{9.8} \left(15\, sen\, 60 + \sqrt{15^2\, sen^2\, 60 + 2(9.8)(2)} \right) = 2.8\ seg$$

Velocidad final: aplico (21)

$$v_F = \sqrt{15^{\,2} + 2(9.8)(2)} = 16.25\ m/s$$

SITUACIONES ESPECIALES

1 – Tirar el proyectil desde el suelo

En este caso $\boxed{h=0}$ (es decir que en todas las fórmulas halladas se sustituye h por 0) y el ángulo α debe cumplir $\boxed{0º<\alpha<90º}$ para que la situación sea válida.

Sustituyo en (12):

$$\boxed{y(x)=\left(-\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x} \qquad (22)$$

Sustituyo en (13):

$$\boxed{x_H=\frac{v_0^{\,2}\,sen(2\alpha)}{2g}} \qquad (23)$$

Sustituyo en (14):

$$\boxed{H=\frac{v_0^{\,2}\,sen^2\alpha}{2g}} \qquad (24)$$

Sustituyo en (16):

$$\boxed{t_H=\frac{v_0\,sen\,\alpha}{g}}$$

Sustituyo en (17):

$$d=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\,sen\,\alpha+\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha+0}\right)=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\,sen\,\alpha+\sqrt{v_0^{\,2}sen^2\alpha}\right)=$$

$$=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(v_0\,sen\,\alpha+v_0\,sen\,\alpha\right)=\left(\frac{v_0\cos\alpha}{g}\right)\left(2v_0\,sen\,\alpha\right)=\frac{v_0^{\,2}\,2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{g}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha)=2\,sen\,\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{d=\frac{v_0^{\,2}\,sen(2\alpha)}{g}} \qquad (25)$$

Sustituyo en (19):

$$t_T = \frac{1}{g}\left(v_0 \, sen\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sen^2\alpha}\right) = \frac{1}{g}\left(v_0 \, sen\alpha + v_0 \, sen\alpha\right) = \frac{1}{g}\left(2v_0 \, sen\alpha\right)$$

$$\boxed{t_T = \frac{2v_0 \, sen\alpha}{g}}$$

Sustituyo en (21):

$$v_F = \sqrt{{v_0}^2 + 0} = \sqrt{{v_0}^2} = v_0$$

$$\boxed{v_F = v_0}$$

Esto significa que, cuando el objeto es arrojado desde el suelo, cae a tierra con la misma velocidad con la que fue lanzado.

2 – Tirar el proyectil hacia arriba

En este caso $\boxed{\alpha = 90^{\circ}}$ (es decir que en todas las fórmulas halladas se hacen las siguientes sustituciones: $sen\,\alpha = 1$ $\cos\alpha = 0$ $sen(2\alpha) = 0$) y $\boxed{v_0 > 0}$

No se puede utilizar la fórmula (12) (ver los comentarios posteriores a la misma), sí la (10):

$$\boxed{y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h}$$

Sustituyo en (13): $x_H = 0$ (resultado previsible ya que la trayectoria en este caso es vertical)

Sustituyo en (14): $$\boxed{H = \frac{{v_0}^2}{2g} + h}$$

Sustituyo en (16): $$\boxed{t_H = \frac{v_0}{g}}$$

Sustituyo en (17): $d = 0$ (resultado previsible ya que la trayectoria en este caso es vertical)

Sustituyo en (19): $$\boxed{t_T = \frac{1}{g}\left(v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2g\,h}\right)}$$

Sustituyo en (21): $$\boxed{v_F = \sqrt{{v_0}^2 + 2g\,h}}$$

3 – Soltar el proyectil desde cierta altura

En este caso $\boxed{v_0 = 0}$ (es decir que en todas las fórmulas halladas se sustituye v_0 por 0) y la altura h debe cumplir $\boxed{h > 0}$ para que la situación sea válida.

No se puede utilizar la fórmula (12) (ver los comentarios posteriores a la misma), sí la (10):

$$\boxed{y = -\frac{g}{2}t^2 + h}$$

Sustituyo en (13): $x_H = 0$ (resultado previsible ya que la trayectoria en este caso es vertical)

Sustituyo en (14): $H = h$ (resultado previsible ya que en este caso se suelta el objeto)

Sustituyo en (16): $t_H = 0$ (resultado previsible ya que en este caso se suelta el objeto)

Sustituyo en (17): $d = 0$ (resultado previsible ya que la trayectoria en este caso es vertical)

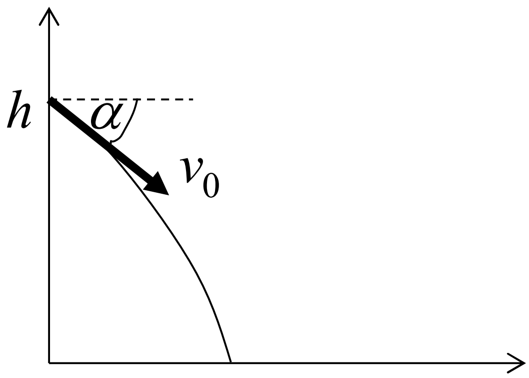
Sustituyo en (19):

$$t_T = \frac{1}{g}\left(0 + \sqrt{0 + 2g\,h}\right) = \frac{1}{g}\left(\sqrt{2g\,h}\right) = \sqrt{\frac{2\cancel{g}\,h}{g^{\cancel{2}}}}$$

$$\boxed{t_T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}}$$

Sustituyo en (21): $\boxed{v_F = \sqrt{2g\,h}}$

4 – Tirar el proyectil en forma oblicua descendente desde cierta altura



En este caso: $\boxed{-90^{\circ} < \alpha < 0^{\circ}}$

Además, para que la situación sea válida: $\boxed{h > 0}$ $\boxed{v_0 > 0}$

(12), (17), (19) y (21) se mantienen sin cambios.

(13), (14) y (16) no son aplicables; en este caso: $x_H = 0$ $H = h$ $t_H = 0$

PROBLEMA BALÍSTICO

Fórmula de α

Un problema típico de balística: dadas las coordenadas del blanco y la velocidad de disparo, determinar el ángulo de tiro.

Utilizo la fórmula (12):

$$y(x)=\left(-\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x+h$$

Hay que tener en cuenta que para que el proyectil de en el blanco, este debe estar en su trayectoria, es decir que sus coordenadas $\left(x_B,y_B\right)$ deberán cumplir la ecuación anterior:

$$y_B=\left(-\frac{g}{2\,{v_0}^2\cos^2\alpha}\right){x_B}^2+\left(\tan\alpha\right)x_B+h$$

Utilizo la relación entre tangente y coseno de un ángulo: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$

$$y_B=\left(-\frac{g}{2\,{v_0}^2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right){x_B}^2+\left(\tan\alpha\right)x_B+h$$

$$y_B=\left(-\frac{g}{2\,{v_0}^2}\right)\left(1+\tan^2\alpha\right){x_B}^2+\left(\tan\alpha\right)x_B+h$$

$$y_B=-\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}-\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}\tan^2\alpha+\left(\tan\alpha\right)x_B+h$$

Paso todo al lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}\tan^2\alpha-x_B\tan\alpha+\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}+y_B-h=0$$

$$\left(\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}\right)\tan^2\alpha+\left(-x_B\right)\tan\alpha+\left(\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}+y_B-h\right)=0$$

Aplico un Cambio de Variable: $z=\tan\alpha$

$$\left(\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}\right)z^2+(-x_B)\,z+\left(\frac{g\,{x_B}^2}{2\,{v_0}^2}+y_B-h\right)=0$$

Esta es una ecuación de 2º grado con incógnita z.
Se resuelve aplicando la conocida fórmula de resolución de una ecuación de 2º grado:

$$z = \frac{-(-x_B) \pm \sqrt{(-x_B)^2 - {}^{2}\cancel{4}\left(\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{\cancel{2}\,v_0^{\;2}}\right)\left(\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{2\,v_0^{\;2}} + y_B - h\right)}}{\cancel{2}\left(\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{\cancel{2}\,v_0^{\;2}}\right)}$$

$$z = \frac{x_B \pm \sqrt{x_B^{\;2} - \dfrac{2g\,x_B^{\;2}}{v_0^{\;2}}\left(\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{2\,v_0^{\;2}} + y_B - h\right)}}{\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{v_0^{\;2}}}$$

$$z = \frac{x_B \pm \sqrt{x_B^{\;2} - \left(\dfrac{g^2\,x_B^{\;4}}{v_0^{\;4}} + \dfrac{2g\,x_B^{\;2}(y_B - h)}{v_0^{\;2}}\right)}}{\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{v_0^{\;2}}}$$

$$z = \frac{x_B \pm \sqrt{\dfrac{x_B^{\;2}}{v_0^{\;4}}\left(v_0^{\;4} - g^2\,x_B^{\;2} - 2g\,v_0^{\;2}\,(y_B - h)\right)}}{\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{v_0^{\;2}}}$$

$$z = \frac{x_B \pm \dfrac{x_B}{v_0^{\;2}}\sqrt{v_0^{\;4} - g^2\,x_B^{\;2} - 2g\,v_0^{\;2}\,(y_B - h)}}{\dfrac{g\,x_B^{\;2}}{v_0^{\;2}}}$$

$$z = \frac{\dfrac{\cancel{x_B}}{\cancel{v_0^{\;2}}}\left(v_0^{\;2} \pm \sqrt{v_0^{\;4} - g^2\,x_B^{\;2} - 2g\,v_0^{\;2}\,(y_B - h)}\right)}{\dfrac{g\,x_B^{\;\cancel{2}}}{\cancel{v_0^{\;2}}}}$$

$$z = \frac{v_0^{\;2} \pm \sqrt{v_0^{\;4} - g^2\,x_B^{\;2} - 2g\,v_0^{\;2}\,(y_B - h)}}{g\,x_B}$$

$$z = \frac{v_0^{\;2} \pm \sqrt{v_0^{\;2}\left(v_0^{\;2} - 2g\,(y_B - h)\right) - g^2\,x_B^{\;2}}}{g\,x_B}$$

Deshago el Cambio de Variable:

$$\tan\alpha = \frac{v_0^{\ 2} \pm \sqrt{v_0^{\ 2}\left(v_0^{\ 2} - 2g\,(y_B - h)\right) - g^2\, x_B^{\ 2}}}{g\, x_B}$$

$$\boxed{\alpha = Arctg\left[\frac{v_0^{\ 2} \pm \sqrt{v_0^{\ 2}\left(v_0^{\ 2} - 2g\,(y_B - h)\right) - g^2\, x_B^{\ 2}}}{g\, x_B}\right]}$$

Ángulo de tiro para dar en (x_B, y_B) desde una altura h cuando se conoce v_0 (26)

Obsérvese que dos ángulos serán solución (debido al $\pm$ presente en la fórmula). Es decir que dos ángulos de tiro dan en el blanco.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Hallar los ángulos de tiro para dar en el punto (80 m, 40 m) lanzando un proyectil a una velocidad de 30 m/s desde una altura de 32 m.

Datos: $v_0 = 30\ m/s$ $\quad h = 32\,m$ $\quad x_B = 80\,m$ $\quad y_B = 40\,m$

$$\alpha = Arctg\left[\frac{30^2 \pm \sqrt{30^2\left(30^2 - 2(9.8)(40-32)\right) - 9.8^2\, 80^2}}{(9.8)(80)}\right] = \begin{cases} 55.31^{\circ} \\ 40.4^{\circ} \end{cases}$$

En el caso particular de que **se dispare desde el suelo** (h = 0) y **el blanco esté en el suelo** $(y_B = 0)$ a una distancia x_B , utilizo la fórmula (25):

$$x_B = \frac{v_0^{\ 2}\, sen(2\alpha)}{g}$$

Despejo α :

$$v_0^{\ 2}\, sen\,(2\alpha) = x_B\, g$$

$$sen\,(2\alpha) = \frac{x_B\, g}{v_0^{\ 2}}$$

$$2\alpha = Arcsen\left(\frac{x_B\, g}{v_0^{\ 2}}\right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2} Arcsen\left(\frac{x_B\, g}{v_0^{\ 2}}\right)}$$

Ángulo de tiro para dar en $(x_B, 0)$
desde el suelo
cuando se conoce v_0
(27)

El argumento del Arcsen debe ser un valor entre –1 y 1 (incluidos).
Además, en este caso el argumento es necesariamente positivo, entonces finalmente se concluye que debe estar acotado entre 0 y 1.
En especial me interesa la cota superior 1:

$$\frac{x_B\, g}{v_0^{\ 2}} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_B\, g \le v_0^{\ 2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_B \le \frac{v_0^{\ 2}}{g}}$$

Condición de validez de (27)

(28)

Así que si la distancia x_B y la velocidad inicial v_0 no cumplen esa condición, el problema no tendrá solución (no existirá α). Obsérvese que esto es coherente con lo obtenido en la fórmula (18).

Debido a una característica especial de la función seno, si finalmente se obtiene una solución, llamémosle α_1, entonces también servirá como solución el ángulo $\boxed{\alpha_2 = 90^{o} - \alpha_1}$

Fórmula de v_0

En algún caso puede suceder que se conozca el ángulo de tiro y que se tenga que determinar la velocidad de disparo.

Se parte de la fórmula (12) y se despeja v_0:

$$y_B = \left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x_B^2 + (\tan\alpha)\, x_B + h$$

$$y_B - h - (\tan\alpha)\, x_B = \frac{-g\, x_B^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$v_0^2 = \frac{-g\, x_B^2}{2\, \cos^2 \alpha\, (y_B - h - \tan\alpha\, x_B)}$$

$$v_0^2 = \frac{g\, x_B^2}{2\, \cos^2 \alpha\, (\tan\alpha\, x_B + h - y_B)}$$

$$v_0 = \pm \sqrt{\frac{g\, x_B^2}{2\, \cos^2 \alpha\, (\tan\alpha\, x_B + h - y_B)}}$$

$$v_0 = \pm \frac{x_B}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2\, (\tan\alpha\, x_B + h - y_B)}}$$

Como v_0 es el módulo de un vector, solo sirve la solución positiva.

$$\boxed{v_0 = \frac{x_B}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2\, (\tan\alpha\, x_B + h - y_B)}}}$$

Velocidad de disparo para dar en (x_B, y_B) desde una altura h cuando se conoce α

(29)

Analizo la validez de esta fórmula:

$$\left. \begin{array}{l} \cos\alpha > 0 \;\Leftrightarrow\; -90^o < \alpha < 90^o \\ \tan\alpha\, x_B + h - y_B > 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > Arctg\left(\dfrac{y_B - h}{x_B} \right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{Arctg\left(\frac{y_B - h}{x_B} \right) < \alpha < 90^o}$$

Así que si x_B, y_B, h, α no cumplen esa condición, el problema no tendrá solución (no existirá v_0).

EJEMPLO DE APLICACIÓN

Hallar la velocidad de disparo de un proyectil para dar en el punto (80 m, 6 m) lanzándolo con un ángulo de 75º desde una altura de 1 m.

Datos: $\alpha = 75^{o}$ $h = 1m$ $x_B = 80\,m$ $y_B = 6\,m$

$$v_0 = \frac{80}{\cos 75}\sqrt{\frac{9.8}{2\ ((\tan 75)\,80 + 1 - 6)}} = 39.93\ m/s$$

En el caso particular de que **se dispare desde el suelo** (h = 0) y **el blanco esté en el suelo** $(y_B = 0)$ a una distancia x_B , utilizo la fórmula (29):

$$v_0 = \frac{x_B}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\ (\tan\alpha\, x_B + 0 - 0)}}$$

$$v_0 = \frac{x_B}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\ (\tan\alpha\, x_B)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{x_B^{\cancel{2}}}{\cos^{\cancel{2}}\alpha}\ \frac{g}{2\ \frac{sen\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\ \cancel{x_B}}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{x_B\, g}{2 sen\,\alpha\cos\alpha}}$$

Utilizo la fórmula del seno del arco doble: $sen(2\alpha) = 2\, sen\,\alpha\cos\alpha$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{x_B\, g}{sen(2\alpha)}}}$$

Velocidad de disparo para dar en $(x_B, 0)$ desde el suelo cuando se conoce α

(30)

Para que haya solución, $sen\,(2\alpha)$ debe ser positivo, así que debe cumplirse: $0^{o} < \alpha < 90^{o}$

Lo cual es lógico teniendo presente que un tiro realizado desde el suelo hacia delante o hacia abajo $(-90^{o} \le \alpha \le 0^{o})$ no tiene sentido.

Comentarios finales

- Obsérvese que la masa del objeto no aparece en ninguna de las fórmulas finales. Dicho de otra forma: **el comportamiento del objeto no depende de su masa**.
- Obsérvese que en ningún momento se exige que todo esto deba suceder en la Tierra, puede ser en cualquier lugar ya que **g es un parámetro genérico que representa a la aceleración gravitatoria del lugar** (planeta, satélite, asteroide, etc)
  En la Tierra $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$
- Así que para poder usar ese valor, **todo tiene que estar expresado en metros y segundos** (es decir longitudes en metros, tiempos en segundos y velocidades en m/s)
- En todo el desarrollo se supuso que el objeto estaba en el vacío (en la página 2 se aclaró que no se tendría en cuenta la resistencia del aire).
  ¿Por qué? Porque al atravesar el aire, sobre el objeto aparecería una fuerza de rozamiento que se opone a su movimiento, con lo cual la aplicación de la segunda ley de Newton generaría ecuaciones diferenciales más complicadas y los posteriores desarrollos no se podrían hacer tan fácilmente.
  Entonces podría pensarse: ¡Estas fórmulas no son aplicables en la Tierra! Lo que sucede es que al ésta tener atmósfera, es decir no haber vacío, sin duda que no se estaría dando las condiciones ideales para resolver todo esto. Pero en muchísimos casos, dada la forma y composición del objeto (por ejemplo una esfera densa), **la alteración producida por el rozamiento con el aire es prácticamente despreciable**, con lo cual a pesar de todo se logran resultados bastante exactos. Por supuesto que en lugares sin atmósfera como por ejemplo la Luna, se estaría en condiciones ideales (vacío), pero recuerde que si quiere estudiar el movimiento de objetos arrojados allí, debe utilizar el valor g de la luna.

$$g_{Luna} = \frac{1}{6}\, g_{Tierra}$$

PARÁBOLA DE SEGURIDAD

Es la envolvente de todas las trayectorias descritas por los proyectiles cuyo ángulo de disparo está comprendido entre 0º y 90º. Fuera de esta parábola, se está a salvo de los proyectiles disparados con velocidad v_0

Cómo se halla

Utilizando la fórmula (22):

$$y(x)=\left(-\frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x$$

Utilizo la relación entre tangente y coseno de un ángulo: $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$

$$y=\left(-\frac{g}{2\,v_0^{\,2}}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x$$

$$y=\left(-\frac{g}{2\,v_0^{\,2}}\right)\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x$$

$$y=-\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}-\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}\tan^2\alpha+\left(\tan\alpha\right)x$$

Paso todo al lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}\tan^2\alpha-x\tan\alpha+\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}+y=0$$

$$\left(\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}\right)\tan^2\alpha+\left(-x\right)\tan\alpha+\left(\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}+y\right)=0$$

$$\tan^2\alpha+\frac{\left(-x\right)}{\left(\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}\right)}\tan\alpha+\frac{\left(\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}+y\right)}{\left(\dfrac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}\right)}=0$$

$$\tan^2\alpha+\left(\frac{2\,v_0^{\,2}}{g\,x^{\cancel{2}}}\right)\left(-\cancel{x}\right)\tan\alpha+\left(\frac{2\,v_0^{\,2}}{g\,x^2}\right)\left(\frac{g\,x^2}{2\,v_0^{\,2}}+y\right)=0$$

$$\tan^2\alpha+\left(-\frac{2\,v_0^{\,2}}{g\,x}\right)\tan\alpha+\left(1+\frac{2\,v_0^{\,2}y}{g\,x^2}\right)=0$$

Se obtuvo una ecuación de 2º grado con incógnita $\tan\alpha$

Ya se vio en (26) que esto tiene 2 soluciones, es decir que *es posible llegar a los puntos accesibles para el tiro* mediante dos ángulos diferentes (observar el punto P_2 en la figura) y esto ocurre solo *si el discriminante es positivo*.

Si *el discriminante fuera negativo* la ecuación no tendría solución, es decir que *no habría ningún ángulo* que permitiera llegar al punto de coordenadas (x, y) (observar el punto P_1 en la figura).

Entonces la frontera entre la región del plano donde se encuentran los puntos accesibles y la región de los puntos no accesibles queda determinada imponiendo que *el discriminante valga 0* (observar el punto P_3 en la figura).

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(-\frac{2v_0^{\ 2}}{g\,x}\right)^2 - 4(1)\left(1+\frac{2v_0^{\ 2}y}{g\,x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\cancel{4}\,v_0^{\ 4}}{g^2\,x^2} - \cancel{4}\left(1+\frac{2v_0^{\ 2}y}{g\,x^2}\right) = 0$$

$$-1 - \frac{2v_0^{\ 2}y}{g\,x^2} = -\frac{v_0^{\ 4}}{g^2\,x^2}$$

$$-\frac{2v_0^{\ 2}y}{g\,x^2} = -\frac{v_0^{\ 4}}{g^2\,x^2} + 1$$

$$y = \frac{-\dfrac{v_0^{\ 4}}{g^2\,x^2} + 1}{-\dfrac{2v_0^{\ 2}}{g\,x^2}}$$

$$y = -\frac{g\,x^2}{2v_0^{\ 2}}\left(-\frac{v_0^{\ 4}}{g^2\,x^2} + 1\right)$$

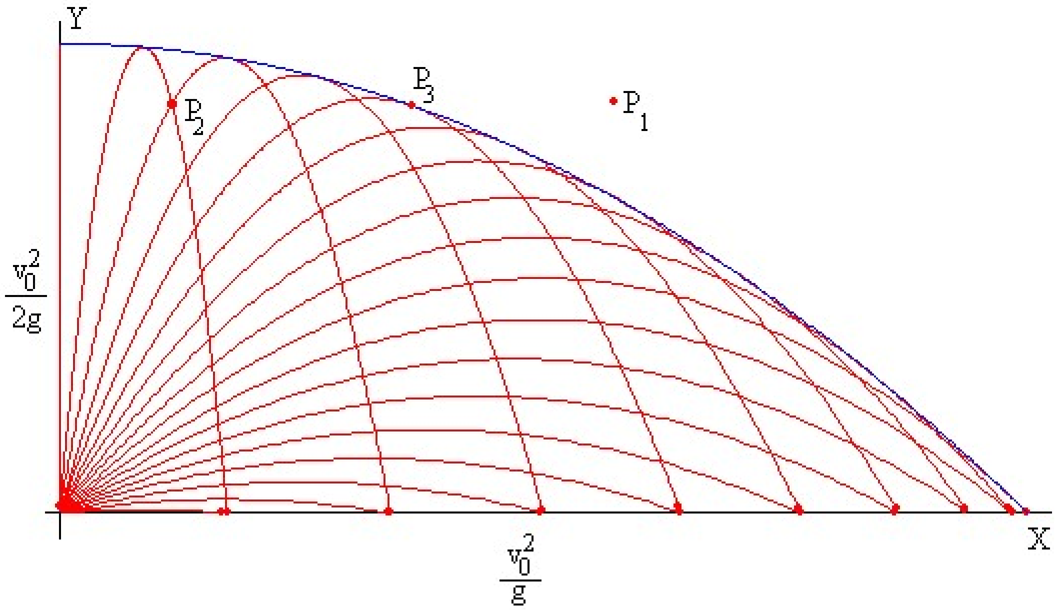
$$y = \frac{\cancel{g}\,\cancel{x^2}}{2\,\cancel{v_0^{2}}}\,\frac{v_0^{\cancel{4}\ 2}}{g^{\cancel{2}}\,\cancel{x^2}} - \frac{g\,x^2}{2v_0^{\ 2}}$$

$$y = \frac{v_0^{\ 2}}{2g} - \frac{g\,x^2}{2v_0^{\ 2}}$$

$$y = \left(-\frac{g}{2v_0^{\ 2}}\right)x^2 + \frac{v_0^{\ 2}}{2g}$$

Es decir que la envolvente (para tiros desde el suelo y con ángulos entre 0º y 90º) es una parábola de ecuación:

$$\boxed{y = \left(-\frac{g}{2\,v_0^{\ 2}} \right) x^2 + \frac{v_0^{\ 2}}{2g}}$$



LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS DE ALTURA MÁXIMA

Supongamos que, manteniendo constante la velocidad de tiro v_0 , se dispara desde el suelo con todos los ángulos de disparo entre 0º y 180º. Se tendrán múltiples trayectorias, cada una de ellas con su punto máximo. Veremos que el lugar geométrico de esos puntos es una elipse.

Se sabe de (23):

$$x_H = \frac{{v_0}^2 \, sen(2\alpha)}{2g}$$

$$sen(2\alpha) = \frac{2g \, x_H}{{v_0}^2}$$

Se sabe de (24):

$$y_H = \frac{{v_0}^2 \, sen^2 \alpha}{2g}$$

Se utilizará $sen^2\alpha = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$$y_H = \frac{{v_0}^2}{2g}\left(\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right)$$

$$y_H = \frac{{v_0}^2}{4g}\left(1-\cos(2\alpha)\right)$$

$$y_H \frac{4g}{{v_0}^2} = 1-\cos(2\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - \frac{4g \, y_H}{{v_0}^2}$$

Utilizo la relación fundamental trigonométrica: $sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$sen^2\,(2\alpha) + \cos^2\,(2\alpha) = 1$$

$$\left(\frac{2g\,x_H}{v_0^{\;2}}\right)^2 + \left(1 - \frac{4g\,y_H}{v_0^{\;2}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{2g}{v_0^{\;2}}\right)^2 x_H^{\;2} + \left(\frac{4g\,y_H}{v_0^{\;2}} - 1\right)^2 = 1$$

$$\frac{x_H^{\;2}}{\left(\dfrac{v_0^{\;2}}{2g}\right)^2} + \left[\frac{4g}{v_0^{\;2}}\left(y_H - \frac{v_0^{\;2}}{4g}\right)\right]^2 = 1$$

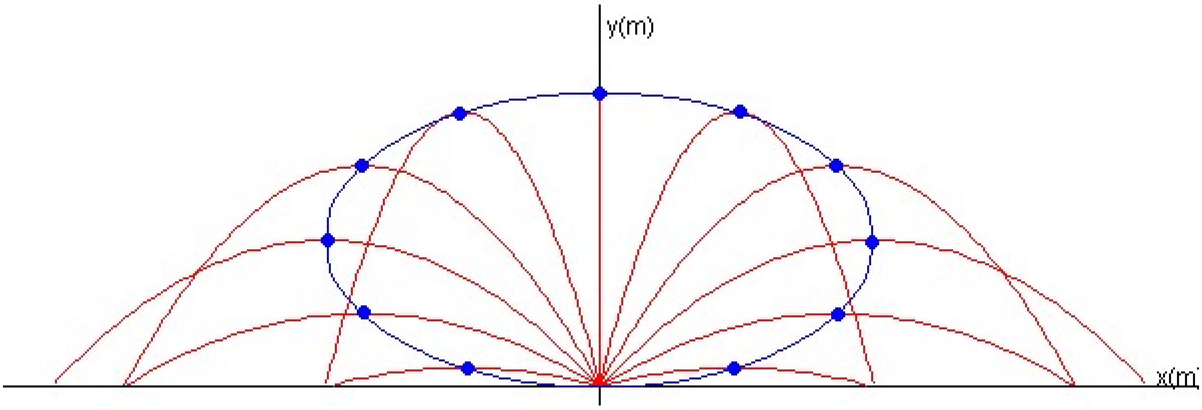
$$\frac{x_H^{\;2}}{4\left(\dfrac{v_0^{\;2}}{4g}\right)^2} + \frac{\left(y_H - \dfrac{v_0^{\;2}}{4g}\right)^2}{\left(\dfrac{v_0^{\;2}}{4g}\right)^2} = 1$$

Sea $b = \dfrac{v_0^{\;2}}{4g}$

$$\frac{x_H^{\;2}}{4b^2} + \frac{\left(y_H - b\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{(2b)^2} + \frac{\left(y - b\right)^2}{b^2} = 1}$$

Esta es la ecuación de una elipse centrada en el punto (0, b) con semieje horizontal 2b y semieje vertical b.


y(m)
x(m)