POLINOMIOS

Escrito por:

Prof. Arturo Rodrigo Farinha

ÍNDICE

Definición de Polinomio

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \,........\, + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

$$a_n \ , \ a_{n-1} \ , \ .... \ , \ a_2 \ , \ a_1 \ , \ a_0 \ \in R$$
$$a_n \neq 0$$
$$n \in N$$

n	es el **grado** del polinomio
$a_n x^n \ , \ a_{n-1} x^{n-1} \ , \ .... \ , \ a_2 x^2 \ , \ a_1 x \ , \ a_0$	son los **términos** del polinomio
$a_n \ , \ a_{n-1} \ , \ .... \ , \ a_2 \ , \ a_1 \ , \ a_0$	son los **coeficientes** del polinomio
a_n	es el **coeficiente principal** del polinomio
a_0	es el **término independiente** del polinomio

Ejemplos

$A(x) = -2x^3 + 6x^2 + x - 5$

grado	3
coeficientes	-2 6 1 -5
coeficiente principal	-2
término indep.	-5

$B(x) = -x^2 + 3x + 2$

grado	2
coeficientes	-1 3 2
coeficiente principal	-1
término indep.	2

$C(x) = 7x^5 + 2x^4 - 6x^2 + 14x$

grado	5
coeficientes	7 2 0 -6 14 0
coeficiente principal	7
término indep.	0

Algunos conceptos básicos

Grado de un polinomio: es el mayor exponente de la variable x (es el **n**)

Polinomio nulo: $P(x) = 0$ (todos sus coeficientes valen 0 y <u>no tiene grado</u>)

Polinomio completo: ninguno de sus coeficientes vale 0 (“tiene todos sus términos”). Ej: A y B
Polinomio incompleto: por lo menos uno de sus coeficientes vale 0 (“faltan términos”). Ej: C

A los polinomios se los denomina con **letras mayúsculas**.

Operaciones con polinomios

SUMA

Se suman los coeficientes de los términos **de igual exponente**.

Ejemplos:

1) $A(x) = -5x^3 + 3x^2 - 20x + 12$

$B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x - 1$

$$A(x) + B(x) = \left(-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12\right) + \left(x^3 - 5x^2 - 5x - 1\right)$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{-5x^3}\ \overline{+3x^2}\ \overset{\frown}{-20x}\ \overset{\frown}{+12}\ \boxed{+x^3}\ \overline{-5x^2}\ \overset{\frown}{-5x}\ \overset{\frown}{-1} =$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{-4x^3}\ \overline{-2x^2}\ \overset{\frown}{-25x}\ \overset{\frown}{+11}$$

$$A(x) + B(x) = -4x^3 - 2x^2 - 25x + 11$$

2) $A(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$

$B(x) = -4x^3 - 8x^2 + 4$

$$A(x) + B(x) = \left(6x^3 + 8x^2 - 2x + 5\right) + \left(-4x^3 - 8x^2 + 4\right)$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{6x^3}\ \overline{+8x^2}\ \overset{\frown}{-\ 2x}\ \overset{\frown}{+5}\ \boxed{-4x^3}\ \overline{-8x^2}\ \overset{\frown}{+4}$$

$$A(x) + B(x) = \boxed{2x^3}\ \overline{+0x^2}\ \overset{\frown}{-2x}\ \overset{\frown}{+9}$$

$$A(x) + B(x) = 2x^3 - 2x + 9$$

RESTA

Se le **suma** al primer polinomio el **opuesto al segundo**.

$A - B = A + (-B) \qquad \text{siendo } -B \text{ el polinomio opuesto de } B$

Ejemplos:

1) $A(x) = -5x^3 + 3x^2 - 20x + 12$

$B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x - 1$

$$A(x) - B(x) = \left(-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12\right) - \left(x^3 - 5x^2 - 5x - 1\right)$$

$$A(x) - B(x) = \left(-5x^3 + 3x^2 - 20x + 12\right) + \left(-x^3 + 5x^2 + 5x + 1\right)$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{-5x^3}\ \overline{+3x^2}\ \widehat{-20x}\ \overset{\frown}{+12}\ \boxed{-x^3}\ \overline{+5x^2}\ \widehat{+5x}\ \overset{\frown}{+1} =$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{-6x^3}\ \overline{+8x^2}\ \widehat{-15x}\ \overset{\frown}{+13}$$

$$A(x) - B(x) = -6x^3 + 8x^2 - 15x + 13$$

2) $A(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$

$B(x) = -4x^3 - 8x^2 + 4$

$$A(x) - B(x) = \left(6x^3 + 8x^2 - 2x + 5\right) - \left(-4x^3 - 8x^2 + 4\right)$$

$$A(x) - B(x) = \left(6x^3 + 8x^2 - 2x + 5\right) + \left(+4x^3 + 8x^2 - 4\right)$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{6x^3}\ \overline{+8x^2}\ \widehat{-2x}\ \overset{\frown}{+5}\ \boxed{+4x^3}\ \overline{+8x^2}\ \overset{\frown}{-4}$$

$$A(x) - B(x) = \boxed{10x^3}\ \overline{+16x^2}\ \widehat{-2x}\ \overset{\frown}{+1}$$

$$A(x) - B(x) = 10x^3 + 16x^2 - 2x + 1$$

MULTIPLICACIÓN

Se aplica la Propiedad Distributiva
(**se multiplica cada término de A por cada término de B** y luego **se suma todo**)

Recordar que para multiplicar 2 términos: se **multiplican los coeficientes** (incluyendo sus signos) y se **suman los exponentes**.

Ejemplo:

$$A(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$
$$B(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

$$A(x).B(x) = \left(-2x^3 + 5x^2 - 4x + 2\right).\left(2x^2 + 6x - 3\right)$$

$$\left(-2x^3\right).\left(2x^2 + 6x - 3\right) = -4x^5 - 12x^4 + 6x^3$$
$$\left(+5x^2\right).\left(2x^2 + 6x - 3\right) = +10x^4 + 30x^3 - 15x^2$$
$$\left(-4x\right).\left(2x^2 + 6x - 3\right) = -8x^3 - 24x^2 + 12x$$
$$\left(+2\right).\left(2x^2 + 6x - 3\right) = +4x^2 + 12x - 6$$

$$A(x).B(x) = \boxed{-4x^5}\ \overline{-12x^4}\ \widehat{+6x^3}\ \overline{+10x^4}\ \widehat{+30x^3}\ \overbrace{-15x^2}\ \widehat{-8x^3}\ \overbrace{-24x^2}\ \underline{\underline{+12x}}\ \overbrace{+4x^2}\ \underline{\underline{+12x}}\ \widetilde{-6}$$
$$A(x).B(x) = \boxed{-4x^5}\ \overline{-2x^4}\ \widehat{+28x^3}\ \overbrace{-35x^2}\ \underline{\underline{+24x}}\ \widetilde{-6}$$
$$A(x).B(x) = -4x^5 - 2x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 24x - 6$$

Observación:

El grado del polinomio resultante es la suma de los grados de los polinomios que se multiplicaron.

DIVISIÓN

Dividir un polinomio **P (dividendo)** entre otro polinomio **D (divisor)** consiste en hallar un polinomio **Q (cociente)** y un polinomio **R (resto)** que cumplan 2 condiciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x) = D(x).Q(x) + R(x) \\ grado\,de\,R(x) < grado\,de\,D(x) \quad o \quad R(x) = 0 \end{array}}$$

Se suele expresar la división con el siguiente esquema (similar a la división entre números):

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

IMPORTANTE

El divisor debe ser no nulo $(D(x) \neq 0)$

$grado\ de\ P \geq grado\ de\ D$

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 23$

$D(x) = x^2 + 4$

$$\begin{array}{llll|l} \cancel{2x^4} & - x^3 & + 2x^2 - x - 23 & & x^2 + 4 \\ \cline{5-5} \cancel{-2x^4} & & - 8x^2 & & 2x^2 - x - 6 \\ \hline & \cancel{-x^3} & - 6x^2 - x - 23 & & \\ & \cancel{+x^3} & \quad + 4x & & \\ \cline{2-4} & & \cancel{-6x^2} + 3x - 23 & & \\ & & \cancel{+6x^2} \quad + 24 & & \\ \cline{3-4} & & \quad 3x + 1 & & \end{array}$$

$$\to \frac{2x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}} = \boxed{2x^2}$$

$$\to \frac{-x^{\cancel{3}\,1}}{\cancel{x^2}} = \boxed{-x}$$

$$\to \frac{-6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \boxed{-6}$$

Entonces: $Q(x) = 2x^2 - x - 6$

$R(x) = 3x + 1$

Se puede, para verificar que Q y R son los correctos, comprobar: $P = D.Q + R$

Polinomios Divisibles

P(x) es **divisible** entre D(x) si y solo si **el resto de su división es el polinomio nulo (R = 0)**.

Es decir que:

P(x) es divisible entre D(x) $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} 0 & Q(x) \end{array}$ $\quad$ $(dicho\ de\ otra\ forma: P(x) = D(x).Q(x))$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x} + 10 & x+2 \\ \cline{2-2} \cancel{-5x} - 10 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$0 \ \rightarrow \ R = 0 \ \Rightarrow \ 5x + 10 \ es \ divisible \ entre \ x+2$

ESQUEMA DE RUFFINI

Sirve para dividir polinomios más fácilmente **cuando el divisor es de la forma** $x - \alpha$

Forma general:

	coeficientes del dividendo	
α		
	coeficientes del cociente	R

Los datos que siempre hay que ingresar en el esquema son *los coeficientes del polinomio dividendo* (en la parte superior del esquema) y α (en la casilla izquierda del esquema).
El esquema calcula los coeficientes del polinomio **cociente** (cuyo grado siempre será uno menos que el grado del dividendo) y el **resto** (que siempre será un número ya que el divisor es de grado 1).

Ejemplos:

1) Hallar cociente y resto resultantes de dividir $P(x) = 2x^3 - 6x + 5$ entre $x - 2$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2 \ \Rightarrow \ \alpha = 2$$

	2	0	-6	5
2		4	8	4
	2	4	2	9

$Q(x) = 2x^2 + 4x + 2$

$R = 9$

2) Hallar cociente y resto resultantes de dividir $P(x) = -x^4 + 5x^2 - 6x + 7$ entre $x + 3$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3 \ \Rightarrow \ \alpha = -3$$

	-1	0	5	-6	7
-3		3	-9	12	-18
	-1	3	-4	6	-11

$Q(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 6$

$R = -11$

Teorema del Resto

$$H)\ \begin{array}{l|l} P(x) & x-\alpha \\ \cline{2-2} R & Q(x) \end{array} \qquad T)\ P(\alpha)=R$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \textit{por Hipótesis}: & \ P(x)=(x-\alpha).Q(x)+R \qquad (\textit{ver definición de división}) \\ \textit{evaluando en } x=\alpha: & \ P(\alpha)=(\alpha-\alpha).Q(\alpha)+R \\ & \ P(\alpha)= \quad 0.Q(\alpha)+R \\ & \ P(\alpha)= \quad 0+R \\ & \ P(\alpha)=R \qquad (\textit{SE LLEGÓ A LA TESIS}) \end{aligned}$$

Ejemplo:

Sea $\mathrm{P(x)}=5\mathrm{x}^2+4x-2$

Si dividimos P(x) entre x-1 (hay que hacer la división), el resto es 7.

Es decir que: $\boxed{\begin{array}{l|l} P(x) & x-1 \\ \cline{2-2} 7 & Q(x) \end{array}}$

Y al evaluar P(x) en 1 (en este caso $\alpha=1$), podemos comprobar que se cumple lo afirmado por la tesis del teorema: $\boxed{\mathrm{P(1)}=7}$

Teorema de Descartes

$$P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha) \iff P(\alpha)=0$$

Para demostrar esto, hay que demostrar el Directo ($\Rightarrow$) y el Recíproco ($\Leftarrow$):

DIRECTO

$H)\ P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha) \qquad T)\ P(\alpha)=0$

Demostración:

$$\text{por Hipótesis}: P(x)=(x-\alpha).Q(x) \qquad (\text{ver definición de polinomios divisibles})$$
$$\text{evaluando en } x=\alpha: P(\alpha)=(\alpha-\alpha).Q(\alpha)$$
$$P(\alpha)=\quad 0.Q(\alpha)$$
$$P(\alpha)=\quad 0 \quad (\text{SE LLEGÓ A LA TESIS DEL DIRECTO})$$

RECÍPROCO

$H)\ P(\alpha)=0 \qquad T)\ P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha)$

Demostración:

$$\text{dividamos } P \text{ entre } (x-\alpha): \quad \begin{array}{l|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$
$$\text{o sea que se cumplirá que}: P(x)=(x-\alpha).Q(x)+R \qquad (\text{ver definición de división})$$
$$\text{evaluando en } x=\alpha: P(\alpha)=(\alpha-\alpha).Q(\alpha)+R$$
$$P(\alpha)=\quad 0.Q(\alpha)\ +R$$
$$P(\alpha)=\quad 0\ +R$$
$$\left.\begin{array}{r} P(\alpha)=R \\ \text{por Hipótesis}:\ P(\alpha)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow R=0$$
$$\text{por definición de divisibilidad de polinomios}: R=0 \Rightarrow P(x) \text{ es divisible entre } (x-\alpha)$$
$$(\text{SE LLEGÓ A LA TESIS DEL RECÍPROCO})$$

Ejemplo:

Sea $P(x)=-3x^2+3x+6$

Si dividimos P(x) entre $x-2$ (hay que hacer la división), el resto es 0.

Es decir que: $\boxed{P(x) \text{ es divisible entre } x-2}$

Y al evaluar P(x) en 2 (en este caso $\alpha=2$), podemos comprobar que se cumple lo afirmado por el teorema: $\boxed{P(2)=0}$

Raíces de un polinomio

Son los valores de la variable x para los cuales el valor numérico del polinomio vale 0.

Es decir que $\boxed{\alpha \text{ es raíz de P(x)} \Leftrightarrow P(\alpha)=0}$

Ejemplos: $P(x)=x^3-3x+18$ Investigar si 2 y –3 son raíces de ese polinomio.

P(2) =
P(-3) =

Cuando se pide “resolver P(x) = 0” significa **hallar las raíces de P(x)**

> **Siempre un polinomio de <u>grado n</u> tiene <u>n raíces</u>** (*no necesariamente todas tienen que ser reales*: puede suceder que algunas sean reales y otras sean “imaginarias”, pero *en total siempre son n raíces*)

Cómo obtener una fórmula a partir de un dato expresado en forma verbal o gráfica

DATO		*FÓRMULA*
"α es raíz de P(x)" "P(x) es divisible entre $(x-\alpha)$" "P(x) dividido entre $(x-\alpha)$ dá resto 0" La gráfica de una función de expresión P(x) corta al eje Ox en α	$\Rightarrow$	$P(\alpha)=0$
"P(x) dividido entre $(x-\beta)$ dá resto R"	$\Rightarrow$	$P(\beta)=R$
El punto de coordenadas (α,β) pertenece a la gráfica de una función de expresión P(x)	$\Rightarrow$	$P(\alpha)=\beta$
La gráfica de una función de expresión P(x) corta al eje Oy en k	$\Rightarrow$	$P(0)=k$ (k es el término independiente del polinomio)

Raíces Evidentes

Se le llaman raíces evidentes de un polinomio a **–1**, **0** y **1** porque para chequear si cierto polinomio posee alguna de esas raíces *no es necesario evaluarlo y ver si dá 0*. Hay **reglas** que permiten, simplemente observando los coeficientes del polinomio, saber si alguna de esas es raíz del polinomio.

El polinomio no tiene término independiente	→	una de sus raíces es **0**
La suma de los coeficientes del polinomio dá 0	→	una de sus raíces es **1**
La suma de los coeficientes de los términos de exponente par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de exponente impar	→	una de sus raíces es **-1**

Ejemplos:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ → no tiene término independiente → una de sus raíces es 0

$P(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12$ → - 1 + 2 + 11 - 12 = 0 → una de sus raíces es 1

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ → 1 - 13 = - 2 – 10 → una de sus raíces es –1

Cómo hallar la raíz de un polinomio de 1º grado

$$P(x) = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

Se iguala el polinomio a 0 y luego se despeja la x.

Cómo hallar las raíces de un polinomio de 2º grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cómo hallar las raíces de un polinomio de 3º grado

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

Si se dá como dato alguna de sus raíces:

1. Se "baja el grado del polinomio por Ruffini" en esa raíz dada.
2. Quedó un polinomio de 2º grado → se obtienen las otras 2 raíces (ver caso anterior)

Si NO se dá como dato alguna de sus raíces:

1. Buscar una raíz **evidente**.
2. Se "baja el grado del polinomio por Ruffini" en esa raíz evidente.
3. Quedó un polinomio de 2º grado → se obtienen las otras 2 raíces (ver caso anterior)

TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Un polinomio P(x) de grado n se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boxed{P(x)=a\left(x-x_1\right).\left(x-x_2\right).....\left(x-x_n\right)}$$

siendo... a el **coeficiente principal** del polinomio

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ las n **raíces** del polinomio

Ejemplos:

1) Hallar la descomposición factorial de $P(x)=-2x^2-4x+6$

Las raíces de ese polinomio son 1 y -3, así que aplicando el TDF: $P(x)=-2\left(x-1\right)\left(x-(-3)\right)$

$$\boxed{P(x)=-2\left(x-1\right)\left(x+3\right)}$$

Observación: si se desarrolla esa expresión (aplicando propiedad distributiva), <u>se obtiene la versión original del polinomio</u>. $-2\left(x-1\right)\left(x+3\right)=-2x^2-4x+6$

2) Hallar un polinomio A(x) sabiendo que tiene raíces –2 y 3; y que A(2) = 12

$$\begin{aligned}&raíz: -2 \quad \Rightarrow \quad factor: \ (x-raíz)=(x-(-2))=(x+2)\\ &raíz: 3 \quad \Rightarrow \quad factor: \ (x-raíz)=(x-3)\end{aligned}$$

$$Aplicando\ TDF: \quad A(x)=a(x+2)(x-3) \qquad (*)$$

Para hallar el valor de a se usa el dato $A(2)=12$:

$$\begin{aligned}A(2)&=a(2+2)(2-3)\\ A(2)&=a(4)(-1)\\ A(2)&=-4a\end{aligned}$$

$$-4a=12 \Rightarrow a=-3$$

Se sustituye el valor hallado de a en (*) *y se desarrolla*:

$A(x)=-3(x+2)(x-3)$

....

$$\boxed{A(x)=-3x^2+3x+18}$$

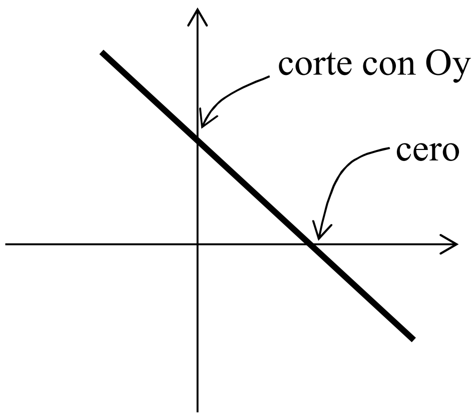
Para estar seguros de que ese es el polinomio correcto,
se puede verificar que cumple con todos los datos dados:

$$\begin{aligned}A(-2)&=0\\ A(3)&=0\\ A(2)&=12\end{aligned}$$

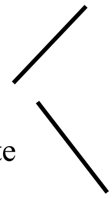
APÉNDICE

Función Lineal

$$\boxed{f(x) = a\,x + b} \quad a \in R, b \in R \;\; a \neq 0$$

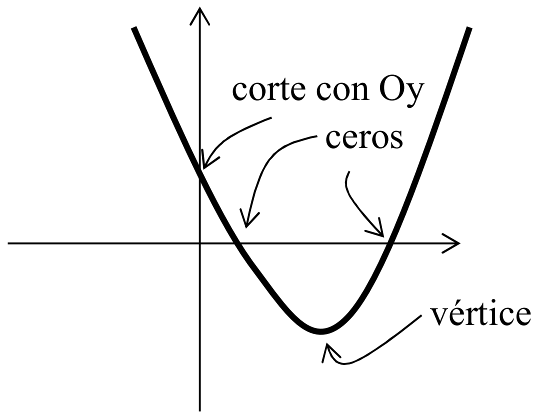


- ✓ Representación Gráfica: **recta**
- ✓ Dominio: R
- ✓ Cero: $x = -\dfrac{b}{a}$
- ✓ Ordenada en el origen: y = b
- ✓ Crecimiento: $si\ a \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ recta creciente} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ recta decreciente} \end{cases}$



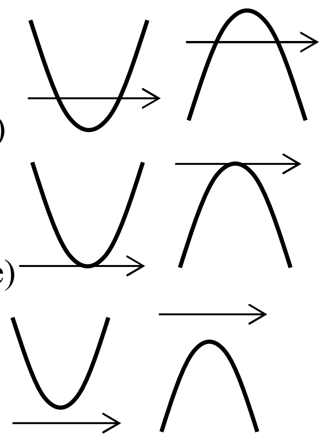
Función Cuadrática

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c} \quad a \in R,\; b \in R,\; c \in R,\;\; a \neq 0$$

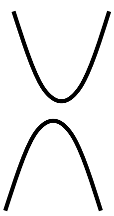


- ✓ Representación Gráfica: **parábola**
- ✓ Dominio: R
- ✓ Ceros:

$$si\ \ b^2 - 4ac \begin{cases} > 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2 \text{ ceros} \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \qquad \text{(la parábola corta al eje x en 2 puntos distintos)} \\ = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 1 \text{ cero doble} \qquad x = -\dfrac{b}{2a} \\ \qquad \text{(la parábola corta al eje x en un solo punto: el vértice)} \\ < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \text{no tiene ceros (la parábola no corta al eje x)} \end{cases}$$



- ✓ Ordenada en el origen: y = c
- ✓ Vértice: $x_V = -\dfrac{b}{2a} \qquad y_V = -\dfrac{b^2}{4a} + c$
- ✓ Concavidad: $si\ a \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ positiva} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ negativa} \end{cases}$



Relaciones entre Raíces y Coeficientes de un polinomio de 2º grado

Sea un polinomio de 2º grado cualquiera: $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad (a \neq 0)$ con raíces reales $\alpha \;\; y \;\; \beta$

Aplicando el Teorema de Descomposición Factorial visto anteriormente, se cumple:

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$$

Aplicando distributiva en el lado derecho de la igualdad:

$$a\,x^2 + b\,x + c = \left(a\,x - a\,\alpha\right)\left(x-\beta\right)$$

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,x^2 - a\,x\,\beta - a\,\alpha\,x + a\,\alpha\,\beta$$

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,x^2 - a\left(\alpha+\beta\right)x + a\,\alpha\,\beta$$

Por identidad de polinomios, los coeficientes de los términos de igual exponente son iguales:

$$\boxed{a\,x^2}\;\overline{+b\,x}\,\overset{\frown}{+c} = \boxed{a\,x^2}\;\overline{-a\left(\alpha+\beta\right)x}\;\overset{\frown}{+a\,\alpha\,\beta}$$

Coeficientes de x^2: $\qquad a = a \quad (\textit{igualdad trivial})$

Coeficientes de x: $\qquad -a\left(\alpha+\beta\right) = b \rightarrow \quad \boxed{\alpha+\beta = -\dfrac{b}{a}}$ *suma de las raíces*

Términos independientes: $\qquad a\,\alpha\,\beta = c \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha\,.\beta = \dfrac{c}{a}}$ *producto de las raíces*

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - 6x - 20$$

Sus raíces son $\left(\text{aplicando} \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad \alpha = 5 \quad \beta = -2$

Entonces:

$$\alpha = 5 \quad \beta = -2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha+\beta = 5+(-2) = 5-2 = \boxed{3} \\ \alpha.\beta = (5).(-2) = \overset{\frown}{-10} \end{cases}$$

$$a = 2 \qquad b = -6 \qquad c = -20 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-6}{2} = -(-3) = \boxed{3} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{-20}{2} = \overset{\frown}{-10} \end{cases}$$

Raíces comunes a dos polinomios

Primer Teorema

Si una raíz es común a dos polinomios, ***es también raíz de cualquier combinación lineal de esos polinomios****.*

H) α es raíz de A(x) y de B(x)

T) α es raíz de $k.A(x)+p.B(x) \quad \left(k \in R \ , \ p \in R \ , \ k^2+p^2 \neq 0\right)$

Demostración:

Por hipótesis: α es raíz de $A(x) \Rightarrow A(\alpha)=0$

α es raíz de $B(x) \Rightarrow B(\alpha)=0$

Sea el polinomio: $C(x)=k.A(x)+p.B(x)$ (k y p reales cualesquiera no nulos simultáneamente)

Evaluándolo en $x=\alpha$: $C(\alpha)=k.A(\alpha)+p.B(\alpha)=k.0+p.0=0+0=0$

Se llegó a que $C(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha$ es raíz de $C(x)$ (*TESIS*)

Segundo Teorema

Si una raíz es común a dos polinomios, ***es también raíz del resto de la división de esos polinomios****.*

H) α es raíz de A(x) y de B(x)

gr(A) $\geq$ gr(B)

T) α es raíz de $R(x)$ (resto de dividir A y B)

Demostración:

Por hipótesis: α es raíz de $A(x) \Rightarrow A(\alpha)=0$

α es raíz de $B(x) \Rightarrow B(\alpha)=0$

Se dividen los polinomios:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

En toda división de polinomios se cumple: $A(x)=B(x).Q(x)+R(x)$

Evaluando esa expresión en $x=\alpha$:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= B(\alpha).Q(\alpha)+R(\alpha) \\ 0 &= 0.Q(\alpha)+R(\alpha) \\ 0 &= 0+R(\alpha) \\ 0 &= R(\alpha) \end{aligned}$$

Se llegó a que $R(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha$ es raíz de R(x) (*TESIS*)