SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Conceptos Básicos
Teórico y Práctico

Escrito por:
Prof. Arturo Rodrigo Farinha

Índice

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son las *incógnitas*, los números reales a_{ij} reciben el nombre de *coeficientes de las incógnitas* y los números $b_1, b_2, ..., b_m$ son los *términos independientes*.

Aquí se trabajará con sistemas que tienen la misma cantidad de ecuaciones y de incógnitas ($m = n$), haciéndose particular hincapié en la resolución de sistemas de 2x2 y 3x3.

Conceptos Varios

- Se llama *solución* de un sistema de ecuaciones lineales a la n-upla ordenada de números reales $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que verifica todas las igualdades del sistema. Es decir que los α_i cumplirán:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ...+ a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ...+ a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ...+ a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

- Según el número de soluciones que tengan los sistemas, podemos clasificarlos de la forma siguiente:

Sistema Incompatible (SI): no tiene solución

Sistema Compatible (SC): tiene solución $\begin{cases} \text{Sistema Compatible Determinado (SCD): tiene una única solución} \\ \text{Sistema Compatible Indeterminado (SCI): tiene infinitas soluciones} \end{cases}$

- *Sistemas homogéneos:* Tienen todos los términos independientes nulos ($b_i = 0$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas siempre admiten la solución (0, 0, 0, ..., 0) (llamada "solución trivial"). Por lo tanto los sistemas homogéneos son siempre compatibles (si tienen únicamente la solución trivial, son Determinados; si tienen la solución trivial y además otras infinitas soluciones, son Indeterminados).

- Si pasamos los términos independientes al primer miembro, el sistema se puede escribir en forma abreviada de la siguiente manera:

$$\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \text{............} \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$$

siendo: $E_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - b_1$
etc.

- *Combinaciones lineales de ecuaciones:* Es una suma de ecuaciones multiplicadas por números cualesquiera.

Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{cases} E_1(x) = 0 \\ E_2(x) = 0 \\ \text{............} \\ E_m(x) = 0 \end{cases}$$

la ecuación $\lambda_1 E_1(x) + \lambda_2 E_2(x) + ... + \lambda_m E_m(x) = 0$ es una combinación lineal de las ecuaciones $E_1(x), E_2(x), ...\, y\, E_m(x)$. Los números reales $\lambda_1,\ \lambda_2,\ .....,\lambda_m$ se llaman coeficientes de la combinación lineal.

- *Sistemas equivalentes:* Tienen las mismas soluciones. Esto quiere decir que toda solución del primer sistema es solución del segundo sistema y viceversa.

Por ejemplo, los sistemas

$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ y $\begin{cases} 5x - 3y = -6 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$ no son equivalentes ya que no tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo, los sistemas

$\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 3x + 9y = -6 \end{cases}$ y $\begin{cases} -8x + 2y = -6 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$ son equivalentes ya que tienen las mismas soluciones.

Las siguientes transformaciones, efectuadas sobre las ecuaciones de un sistema lineal, lo convierten en otro sistema equivalente:

- ✓ Cambiar el orden de las ecuaciones.
- ✓ Multiplicar una de las ecuaciones por un número distinto de cero.
- ✓ Sumar a una de las ecuaciones una combinación lineal de las demás.
- ✓ Sustituir una ecuación por una combinación lineal en la que ella intervenga, siempre que su coeficiente sea distinto de cero. (Teorema Fundamental de Equivalencia)
- ✓ Suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Teorema Fundamental de Equivalencia

Si en un sistema de ecuaciones se cambia una ecuación por otra que es combinación lineal de ella y de las restantes, siempre que el coeficiente de la ecuación sustituida sea distinto de cero, se obtiene otro sistema que es equivalente al primero.

Demostración:

Supongamos que es la primera ecuación la que se cambia. Vamos a probar que los sistemas

$$I \begin{cases} E_1(x)=0 \\ E_2(x)=0 \\ \text{............} \\ E_m(x)=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad II \begin{cases} \lambda_1 E_1(x)+\lambda_2 E_2(x)+\text{.........}+\lambda_m E_m(x)=0; \quad \lambda_1 \neq 0 \\ E_2(x)=0 \\ \text{.............} \\ E_m(x)=0 \end{cases}$$

son equivalentes.

- Demostraremos que las soluciones del sistema *I*, también lo son del sistema *II*:

Supongamos que α es solución del sistema *I*:

$$\text{Entonces se cumple que } \begin{cases} E_1(\alpha)=0 \\ E_2(\alpha)=0 \\ \text{............} \\ E_m(\alpha)=0 \end{cases}$$

y multiplicando respectivamente por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ y sumando se obtiene que

$$\lambda_1 E_1(\alpha)+\lambda_2 E_2(\alpha)+\text{...........}+\lambda_m E_m(\alpha)=0$$

Esto implica que α verifica todas las ecuaciones del sistema *II* . Por lo tanto es también solución del sistema *II*.

- Demostraremos que las soluciones del sistema *II*, también lo son del sistema *I*:

Supongamos ahora que α es solución del sistema *II*:
Si es así, se cumplirá que:

$$\begin{cases} \lambda_1 E_1(\alpha)+\lambda_2 E_2(\alpha)+\text{.........}+\lambda_m E_m(\alpha)=0 \\ E_2(\alpha)=0 \\ \text{.............} \\ E_m(\alpha)=0 \end{cases}$$

y como $\lambda_1 \neq 0$ podemos despejar $E_1(\alpha)$ de la 1ª ecuación:

$$\lambda_1 E_1(\alpha)=-\lambda_2 E_2(\alpha)-\text{.........}-\lambda_m E_m(\alpha)$$

$$E_1(\alpha)=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}E_2(\alpha)-\text{..........}-\frac{\lambda_m}{\lambda_1}E_m(\alpha)$$

Como $E_2(\alpha)=\text{.....}=E_m(\alpha)=0$, se tiene que:

$$E_1(\alpha)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.0-\text{.........}-\frac{\lambda_m}{\lambda_1}.0=0$$

Esto implica que α verifica todas las ecuaciones del sistema *I* . Por lo tanto es también solución del sistema *I*.

Conclusión final: *Los sistemas I y II son equivalentes.*

Métodos de Resolución de SEL

Se presentarán 3 métodos de resolución:

- Sustitución
- Gauss
- Cramer

Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir la expresión resultante en las restantes. De esa manera se obtiene un sistema formado por una ecuación e incógnita menos. Se realiza nuevamente el despeje y sustitución hasta que se obtenga el valor de todas las incógnitas.

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\begin{cases} -2x-3y=-7 \\ -x+5y=3 \end{cases}$$

Despejamos x en la 2ª ecuación:
$x=5y-3$ (*)

Sustituimos esa expresión de x en la 1ª ecuación:
$-2(5y-3)-3y=-7$

$-10y+6-3y=-7$

$-13y+6=-7$

$y=1$

Sustituimos ese valor de y en (*):
$x=5(1)-3$

$x=2$

Así que la solución es:
$x=2$

$y=1$

Ejemplo de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x+3y=-2 \\ -4x-12y=8 \end{cases}$$

Despejamos x en la 2ª ecuación:

$$x=\frac{12y+8}{-4} \quad \Rightarrow \quad x=-3y-2 \quad (*)$$

Sustituimos esa expresión de x en la 1ª ecuación:

$$(-3y-2)+3y=-2$$
$$-3y-2+3y=-2$$
$$-3y+3y=-2+2$$
$$0=0$$

La igualdad obtenida es cierta, pero no se obtuvo un valor específico de *y*. Esto significa que *y* puede tomar cualquier valor: $y=\lambda$, siendo λ un real cualquiera

Sustituimos ese valor de y en (*):

$$x=-3\lambda-2$$

Así que las soluciones son:

$$x=-3\lambda-2$$
$$y=\lambda \qquad (\lambda \text{ es un real cualquiera})$$

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)

$$\begin{cases} 5x-6y=3 \\ 10x-12y=-11 \end{cases}$$

Despejamos x en la 2ª ecuación:

$$x=\frac{-11+12y}{10}$$

Sustituimos esa expresión de x en la 1ª ecuación:

$$5\left(\frac{-11+12y}{10}\right)-6y=3$$
$$\frac{-55+60y-60y}{10}=3$$
$$-55=30$$

La igualdad obtenida es imposible, así que el sistema no tiene solución.

Método de Gauss

También llamado de *reducción* y de *escalerización*.

Consiste en multiplicar cada ecuación por un número conveniente, de manera tal que al sumar las ecuaciones se elimine alguna de las incógnitas. De esta forma se sustituye una ecuación por una combinación lineal de las ecuaciones del sistema. El propósito de esto es transformar el sistema dado en otro equivalente cuyas incógnitas sean más fáciles de despejar.

Sistemas de 2x2

Paso 1: Se multiplican la 1ª y 2ª ecuación por números convenientes para que al sumarlas se elimine la x. Esta suma será la nueva 2ª ecuación (tendrá solo y).
Paso 2: Se despeja la **y** de esa ecuación.
Paso 3: Se sustituye el valor hallado de y en la 1ª ecuación y se despeja la **x**.

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ -5x+2y=-4 \end{cases}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{lcl} 5(2x-3y=-5) & \rightarrow & 10x-15y=-25 \\ 2(-5x+2y=-4) & \rightarrow & -10x+4y=-8 \\ \hline & & -11y=-33 \ (\text{nueva } 2^{a} \text{ ecuación}) \end{array}$$

Así que el sistema equivalente es: $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ \quad -11y=-33 \end{cases}$

Paso 2:

$$-11y=-33 \ \Rightarrow \ y=\frac{-33}{-11}=3$$

Paso 3:

$$2x-3(3)=-5 \ \Rightarrow \ 2x-9=-5 \ \Rightarrow \ x=2$$

Solución: x = 2 y = 3 (la solución es una sola: el punto de coordenadas (2,3))

Ejemplo de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} -2x-2y=-6 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{lcr} 1(-2x-2y=-6) & \rightarrow & -2x-2y=-6 \\ 2(x+y=3) & \rightarrow & 2x+2y=\ \ 6 \\ \hline & & 0y=\ \ 0 \end{array}$$

Así que el sistema equivalente es: $\begin{cases} -2x-2y=-6 \\ \qquad\quad 0y=0 \end{cases}$

Paso 2:

De 0y=0 se deduce que y puede tener cualquier valor: $y=\lambda$, siendo λ un real cualquiera

Paso 3:

$-2x-2\lambda=-6 \ \Rightarrow\ -2x=2\lambda-6 \ \Rightarrow\ x=3-\lambda$

Solución: $\begin{array}{l} x=3-\lambda \\ y=\lambda \end{array}$ (λ es un real cualquiera)

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)

$$\begin{cases} 3x+3y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{lcr} 1(3x+3y=2) & \rightarrow & 3x+3y=2 \\ -3(x+y=3) & \rightarrow & -3x-3y=-9 \\ \hline & & 0y=-7 \end{array} \ (\textit{nueva } 2^{a} \textit{ ecuación})$$

Así que el sistema equivalente es: $\begin{cases} 3x+3y=2 \\ 0y=-7 \end{cases}$

Paso 2:

$0y=-7$ Es imposible de resolver (no existe y que verifique dicha ecuación ya que 0.y es igual a 0)

Solución: El sistema es Incompatible (no tiene solución).

Sistemas de 3x3

Paso 1: Se multiplican la 1ª y 2ª ecuación por números convenientes para que al sumarlas se elimine la x. Esta suma será la nueva 2ª ecuación (no tendrá x).
Paso 2: Se multiplican la 1ª y 3ª ecuación por números convenientes para que al sumarlas se elimine la x. Esta suma será la nueva 3ª ecuación (no tendrá x).
Paso 3: Se multiplican las nuevas ecuaciones 2 y 3 por números convenientes para que al sumarlas se elimine la y. Esta suma será la nueva 3ª ecuación (tendrá solo z).
Paso 4: Se despeja la **z** de la 3ª ecuación.
Paso 5: Se sustituye el valor hallado de z en la 2ª ecuación y se despeja la **y**.
Paso 6: Se sustituyen los valores hallados de z e y en la 1ª ecuación y se despeja la **x**.

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\begin{cases} -3x+5y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{cases}$$

$Paso\,1:$

$$\begin{array}{lcl} 2(-3x+5y-2z=-1) & \to & -6x+10y-4z=-2 \\ 3(2x-3y+4z=4) & \to & \underline{6x-9y+12z=12} \\ & & y+8z=10 \; (nueva\, 2^{a}\, ecuación) \end{array}$$

$Paso\,2:$

$$\begin{array}{lcl} 5(-3x+5y-2z=-1) & \to & -15x+25y-10z=-5 \\ 3(5x-y+3z=16) & \to & \underline{15x-3y+9z=48} \\ & & 22y-z=43 \; (nueva\, 3^{a}\, ecuación) \end{array}$$

$Paso\,3:$

$$\begin{array}{lcl} 22(y+8z=10) & \to & 22y+176z=220 \\ -1(22y-z=43) & \to & \underline{-22y+z=-43} \\ & & 177z=177 \; (nueva\, 3^{a}\, ecuación) \end{array}$$

Así que el sistema equivalente es: $\begin{cases} -3x+5y-2z=-1 \\ y+8z=10 \\ 177z=177 \end{cases}$

$Paso\,4:$

$177z=177 \Rightarrow z=1$

$Paso\,5:$

$y+8(1)=10 \Rightarrow y+8=10 \Rightarrow y=2$

$Paso\,6:$

$-3x+5(2)-2(1)=-1 \Rightarrow -3x+10-2=-1 \Rightarrow x=3$

$Solución: \quad x=3 \quad y=2 \quad z=1$

Ejemplo de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 5x-z=3 \\ -2x-4y+6z=12 \end{cases}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{lcl} 5(x+2y-3z=-6) & \rightarrow & 5x+10y-15z=-30 \\ -1(5x-z=3) & \rightarrow & \underline{-5x \qquad + z = -3} \\ & & 10y-14z=-33 \ (\textit{nueva } 2^{a} \textit{ ecuación}) \end{array}$$

Paso 2:

$$\begin{array}{lcl} -2(x+2y-3z=-6) & \rightarrow & -2x-4y+6z=12 \\ -1(-2x-4y+6z=12) & \rightarrow & \underline{2x+4y-6z=-12} \\ & & 0z=0 \ (\textit{nueva } 3^{a} \textit{ ecuación}) \end{array}$$

Paso 3:

No es necesario ya que esta 3ª ecuación no tiene y

Así que el sistema equivalente es: $\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ \quad 10y-14z=-33 \\ \qquad\quad 0z=0 \end{cases}$

Paso 4:

De 0z=0 se deduce que z puede tener cualquier valor: $z=\lambda$, siendo λ un real cualquiera

Paso 5:

$$10y-14\lambda=-33 \Rightarrow y=\frac{14\lambda-33}{10}$$

Paso 6:

$$x+2\frac{14\lambda-33}{10}-3\lambda=-6 \Rightarrow x=\frac{\lambda+3}{5}$$

Solución:

El sistema es Compatible Indeterminado (hay infinitas soluciones dependientes de un parámetro λ) y sus soluciones son:

$x=\dfrac{\lambda+3}{5}$

$y=\dfrac{14\lambda-33}{10}$ (λ es un real cualquiera)

$z=\lambda$

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Paso 1:

$$\begin{array}{rcr} 4(2x - y + 3z = 6) & \rightarrow & 8x - 4y + 12z = 24 \\ -2(4x - 2y + 6z = 9) & \rightarrow & \underline{-8x + 4y - 12z = -18} \\ & & 0z = 6 \end{array}$$

La ecuación $0.z = 6$ es absurda porque no existe un valor de z que la cumpla (0.z da siempre 0 para cualquier valor de z). Por lo tanto el sistema es Incompatible (no tiene solución).

Método de Cramer [1]

Permite la resolución de un sistema de nxn (n ecuaciones y n incógnitas) mediante *determinantes*.

Sea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Este se puede escribir en forma matricial:

$$A.X = B$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

A la matriz A se la llama *matriz del sistema*.

El método de Cramer es aplicable solamente cuando <u>el determinante de A es distinto de 0</u>.
Se basa en la Regla de Cramer, cuyo enunciado es: *Un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas en que el determinante de la matriz de ese sistema no es 0, tiene solución única.*

Despejemos la matriz X de la ecuación matricial $A.X = B$:

Se multiplican ambos miembros por A^{-1} del lado izquierdo: $A^{-1}A\,X = A^{-1}B$
(A^{-1} existe porque se exigió la condición $\det(A) \neq 0$)
Se aplica la propiedad asociativa del producto de matrices: $\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B$
Por ser A^{-1} la matriz inversa de A: $I.X = A^{-1}B$ (*I* es la matriz identidad)
Por ser *I* la matriz identidad: $\boxed{X = A^{-1}B}$

Es decir que se puede obtener la matriz de las incógnitas multiplicando la inversa de la matriz del sistema por la matriz formada por los términos independientes.

Puede demostrarse (no se realiza la demostración en este trabajo) que esto implica lo siguiente:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} \qquad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

[1] Para este método es necesario poseer conocimientos básicos acerca de matrices y determinantes. Para ello puede consultar el trabajo que hice acerca de esos temas.

Donde:

$$A_x = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

Es decir que el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo entre el determinante de la matriz del sistema a los determinantes de las matrices formadas sustituyendo en la matriz del sistema la columna de la incógnita buscada por la columna de los términos independientes.

Resumiendo:

Cramer para sistemas de 3x3

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_x = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

Discusión de un sistema de 3x3

$$\det(A)\begin{cases} \neq 0 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado. SE PUEDE UTILIZAR EL MÉTODO DE CRAMER} \\ = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Por lo menos uno de los determinantes } \det(\mathrm{A_x}), \det(\mathrm{A_y}), \det(\mathrm{A_z}) \text{ es distinto de } 0 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ \det(\mathrm{A_x}) = \det(\mathrm{A_y}) = \det(\mathrm{A_z}) = 0 \rightarrow \text{DEBE RESOLVERSE POR OTRO MÉTODO} \\ \text{QUE NO SEA CRAMER} \rightarrow \text{Resultará} \begin{cases} \text{Sistema Incompatible} \\ \text{o} \\ \text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado (solución única)

$$\begin{cases} -3x+5y-2z=-1 \\ 2x-3y+4z=4 \\ 5x-y+3z=16 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(A)=59 \Rightarrow$ Se puede aplicar Cramer

$$A_x=\begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 16 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A_y=\begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & 16 & 3 \end{bmatrix} \quad A_z=\begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 16 \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{\det(A_x)}{\det(A)}=\frac{177}{59}=3$$
$$y=\frac{\det(A_y)}{\det(A)}=\frac{118}{59}=2$$
$$z=\frac{\det(A_z)}{\det(A)}=\frac{59}{59}=1$$

Ejemplo de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 5x-z=3 \\ -2x-4y+6z=12 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$\det(A)=0 \Rightarrow$ Hay que analizar los determinantes de A_x, A_y y A_z

$$A_x=\begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 12 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad A_y=\begin{bmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & 12 & 6 \end{bmatrix} \quad A_z=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$\det(A_x)=\det(A_y)=\det(A_z)=0 \Rightarrow$ Este método no decide.

Hay que utilizar otro método. Ver la resolución de este sistema mediante el método de Gauss en la página 10. Aplicando Gauss se obtiene que el sistema es Compatible Indeterminado.

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)
Caso 1

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ 4x - 2y + 6z = 9 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Hay que analizar los determinantes de $\mathrm{A_x}$, $\mathrm{A_y}$ y $\mathrm{A_z}$

$$A_x = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 9 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_z = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathrm{A_x}) = 6$, $\det(\mathrm{A_y}) = 3$, $\det(\mathrm{A_z}) = -3 \Rightarrow$ Por lo menos uno de los determinantes no es $0 \Rightarrow$

Sistema Incompatible

Ejemplo de Sistema Incompatible (no tiene solución)
Caso 2

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow$ Hay que analizar los determinantes de $\mathrm{A_x}$, $\mathrm{A_y}$ y $\mathrm{A_z}$

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathrm{A_x}) = \det(\mathrm{A_y}) = \det(\mathrm{A_z}) = 0 \Rightarrow$ Este método no decide.

Aplicando Gauss resulta que el sistema es Incompatible.

En sistemas de 2x2, el método de resolución y la discusión son similares a lo visto para sistemas de 3x3.

Cramer para sistemas de 2x2

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_x = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_y = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} \qquad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

Discusión de un sistema de 2x2

$$\det(A)\begin{cases} \neq 0 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado. SE PUEDE UTILIZAR EL MÉTODO DE CRAMER} \\ = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{Por lo menos uno de los determinantes } \det(\mathrm{A_x}), \det(\mathrm{A_y}) \text{ es distinto de } 0 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ \det(\mathrm{A_x}) = \det(\mathrm{A_y}) = 0 \rightarrow \text{DEBE RESOLVERSE POR OTRO MÉTODO} \\ \text{QUE NO SEA CRAMER} \rightarrow \text{Resultará} \begin{cases} \text{Sistema Incompatible} \\ \text{o} \\ \text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo de Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -5x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = -11 \Rightarrow$ Se puede aplicar Cramer

$$A_x = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-33}{-11} = 3$$

Comparación de los métodos

¿El método es capaz de indicar de qué tipo es el sistema considerado?

Tipo de sistema \ Método	**SUSTITUCIÓN**	**GAUSS**	**CRAMER**
Compatible Determinado	*Sí*	*Sí*	*Sí*
Compatible Indeterminado	*Sí*	*Sí*	*No*
Incompatible	*Sí*	*Sí*	*A veces No*

Al solo efecto de hacer un estudio comparativo de los 3 métodos vistos, a continuación realizo un análisis de la cantidad de "cuentas" propias a realizar en cada uno de ellos.
Este análisis no pretende ser riguroso, solamente es para tener una noción acerca de la "complejidad" y de cuánto "trabajo" puede llegar a insumir cada método.

- En el *método de Sustitución* se cuenta la cantidad de despejes que se deben hacer de incógnitas.
- En el *método de Gauss* se cuenta la cantidad de combinaciones lineales que se deben hacer entre dos ecuaciones.
- En el *método de Cramer* se cuenta la cantidad de determinantes que se deben calcular (en forma general, cuántos de matrices de nxn; y en forma más específica y significativa cuántos de matrices de 2x2).
  Por ejemplo, un sistema de 3x3 requiere del cálculo de los determinantes de 4 matrices de 3x3 (A, A_x, A_y y A_z). Hay que tener en cuenta que la complejidad del cálculo del determinante de una matriz de 3x3 no es la misma que la de una matriz de 4x4, así que se considera la cantidad de determinantes de matrices de 2x2 necesarias para hallar el determinante de una matriz. Retomando el ejemplo, calcular el determinante de una matriz de 3x3 requiere, por el desarrollo de un determinante por sus adjuntos, del cálculo de los determinantes de 3 matrices de 2x2. Esto significa que para hallar los determinantes de 4 matrices de 3x3, en total se deben hallar 12 determinantes de matrices de 2x2.

Dimensiones del sistema	**SUSTITUCIÓN** cantidad de despejes que hay que hacer	**GAUSS** cantidad de combinaciones lineales que hay que hacer	**CRAMER**	
			cantidad de determinantes de matrices de nxn que hay que hallar	cantidad de determinantes de matrices de 2x2 que hay que hallar
2 x 2	1	1	3	3
3 x 3	2	3	4	12
4 x 4	3	6	5	60
n x n	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n+1$	$\frac{(n+1)!}{2}$

Se puede observar que el método de Sustitución requiere de pocas "cuentas" en comparación con el de Gauss, que requiere de varias combinaciones lineales. A su vez el método de Cramer requiere del cálculo de una gran cantidad de determinantes, siendo ya muy notoria en sistemas de 4x4. Además hay que tener en cuenta que Cramer solamente es viable cuando el sistema es Compatible Determinado, por lo que es un método poco recomendable para sistemas de 4x4 y más, aunque su fortaleza es que, a diferencia de los otros métodos, posee una expresión teórica compacta de las soluciones y discusión del sistema.

Práctico de SEL

Resolver los siguientes SEL utilizando los métodos de Sustitución, de Gauss y de Cramer:

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ $x = \frac{2}{5} \quad y = -\frac{1}{5}$

$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ *No tiene solución*

$\begin{cases} -5x + 7y = 3 \\ 20x - 28y = -12 \end{cases}$ $x = \frac{7\lambda - 3}{5} \quad y = \lambda$

$\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ 7x + 8y = 15 \end{cases}$ $x = y = 1$

$\begin{cases} 6x + 8y = 6 \\ 7x - 5y = 7 \end{cases}$ $x = 1 \quad y = 0$

$\begin{cases} 5x - 7y = -4 \\ 3x + 5y = 16 \end{cases}$ $x = y = 2$

$\begin{cases} -2x + y = 7 \\ 4x - 2y = -14 \end{cases}$ $x = \frac{\lambda - 7}{2} \quad y = \lambda$

$\begin{cases} 3x - 3y = 18 \\ x - y = 6 \end{cases}$ $x = \lambda + 6 \quad y = \lambda$

$\begin{cases} x + 3y = 18 \\ 3x + 9y = 47 \end{cases}$ *No tiene solución*

$\begin{cases} -4x - 2y = -16 \\ -2x - y = -13 \end{cases}$ *No tiene solución*

$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ -4x - 2y = -26 \end{cases}$ $x = \frac{13 - \lambda}{2} \quad y = \lambda$

$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -5x + 4y = 0 \end{cases}$ $x = y = 0$

$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$ $x = 4 \quad y = 5 \quad z = 2$

$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$ $x = 4 \quad y = 2 \quad z = 5$

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5x + 6y - 3z = 3 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$ $x = 0 \quad y = z = 1$

$\begin{cases} -2x = -14 \\ 3x + y + 3z = 27 \\ x - y - 3z = 1 \end{cases}$ $x = 7 \quad y = 6 - 3\lambda \quad z = \lambda$

$\begin{cases} x + y - 4z = 5 \\ -x + 11y - 16z = -1 \\ 2x - 4y + 2z = 8 \end{cases}$ $x = \frac{14 + 7\lambda}{3} \quad y = \frac{1 + 5\lambda}{3} \quad z = \lambda$

$\begin{cases} 4x - 4y = -12 \\ 4x - 3y + 3z = 7 \\ 12x - 12y = -38 \end{cases}$ *No tiene solución*

$\begin{cases} -2x - y + z = -7 \\ 4x + 5y - 7z = 17 \\ x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$ *No tiene solución*

$\begin{cases} -3x + 3z = -3 \\ x + 2z = 1 \\ -x + 3y - 5z = 26 \end{cases}$ $x = 1 \quad y = 9 \quad z = 0$

$\begin{cases} -2x - 3y - 2z = -24 \\ -2x - 3y - 9z = -80 \\ 2x + 3y - 5z = -32 \end{cases}$ $x = \frac{8 - 3\lambda}{2} \quad y = \lambda \quad z = 8$

$\begin{cases} -2x - 2y - 5z = -22 \\ -2y - 2z = -10 \\ -5x - 4y + 2z = 4 \end{cases}$ $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 4$

$\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 4x - 4y + 8z = 0 \end{cases}$ $x = y = z = 0$

$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 0 \\ -4x - 4y - 2z = 5 \\ -4x - 4z = 0 \end{cases}$ *No tiene solución*